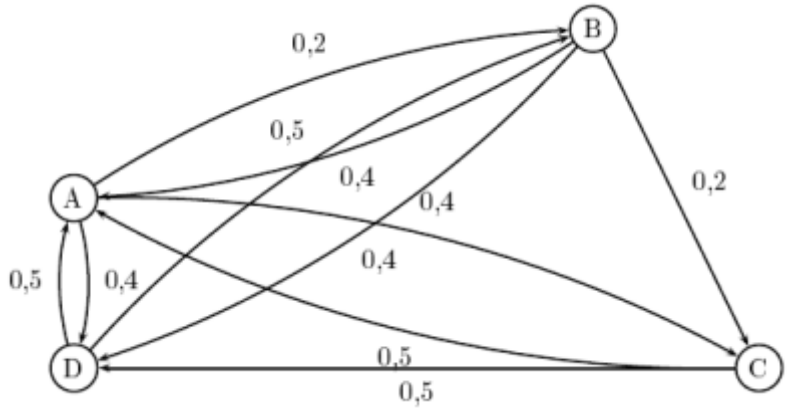
produit tropical : $2 \oplus 3 = \max(2,3) = 3$

RAPPORT STAGE HIPPOCAMPE :
Marches sur les graphes finis



Plan

- Remerciements
- Présentation du stage
- Déroulement du stage
    1) Premier jour
    2) Deuxième jour
    3) Troisième jour
- Bilan personnel
- Annexe : sujet du stage

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier Mr Glenn Merlet, responsable de ce stage, pour m'avoir expliqué, au préalable, le déroulement de celui-ci et pour m'avoir aidé à encadré au mieux les élèves durant le stage.

Je remercie également les deux autres tuteurs Mr Arnaldo Nogueira et Mr Arnaud Hilion, qui, par leurs solides connaissances en mathématiques et leurs expériences des stages hippocampes, m'ont conseillée tout au long du stage.

Un grand merci aussi à toute l'équipe de l'IREM pour leur accueil chaleureux et leur dévouement me permettant de me sentir à l'aise dès le premier jour.

Merci aussi aux chercheurs/doctorants qui sont venus participer à l'exposition des posters réalisés par les élèves. Cela s'est déroulé exceptionnellement un vendredi après-midi et nous redoutions que peu de personnes soient dans les locaux un vendredi après-midi veille de vacances. Heureusement, une dizaine de chercheurs/doctorants étaient présents à ce rendez-vous.

Pour finir, je remercie ceux qui ont permis de faire vivre ce stage et de le rendre intéressant : la classe de terminale S option spé maths du lycée Marseilleveyre et leur enseignant Mr Hervé Milliard qui est un adepte des stages hippocampes.

Leur sérieux et leur gentillesse ont grandement participé au bon déroulement de ce stage où régnait chaque jour un climat propice au travail et aux apprentissages des élèves.

Présentation du stage

Le stage s'est déroulé du mercredi 30 mars 2016 au vendredi 1er avril 2016 à l'IREM d'Aix-Marseille situé sur le campus de Luminy.

Chaque journée commençait à 9h30 et se finissait à 16h30 (3h le matin et 3h l'après-midi).

Le thème abordé durant ce stage fut les marches sur des graphes finis. Ce thème a été découpé en trois sous-thèmes : puissance des matrices d'adjacence, marches au hasard sur le graphe, produits tropicaux. Les sous-thèmes 2 et 3 ont été inversés par rapport au sujet initial (cf annexe).

Les élèves étant en T°S spé maths, une des nouveautés de leur programme de spé et l'apparition des matrices et des suites de matrices. C'est avant tout cet deuxième aspect qui nous concerne pour ce stage.

Voici l'extrait du programme officiel correspondant à cette partie :

Matrices et suites

Il s'agit d'étudier des exemples de processus discrets, déterministes ou stochastiques, à l'aide de suites ou de matrices. On introduit le calcul matriciel sur des matrices d'ordre 2. Les calculs sur des matrices d'ordre 3 ou plus sont essentiellement effectués à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel.

Exemples de problèmes	Contenus
Marche aléatoire simple sur un graphe à deux ou trois sommets. Marche aléatoire sur un tétraèdre ou sur un graphe à N sommets avec saut direct possible d'un sommet à un autre : à chaque instant, le mobile peut suivre les arêtes du graphe probabiliste ou aller directement sur n'importe quel sommet avec une probabilité constante p. Etude du principe du calcul de la pertinence d'une page web. Modèle de diffusion d'Ehrenfest : N particules sont réparties dans deux récipients ; à chaque instant, une particule choisie au hasard change de récipient. Modèle proie prédateur discrétisé : - évolution couplée de deux suites récurrentes ; - étude du problème linéarisé au voisinage du point d'équilibre.	• Matrices carrées, matrices colonnes : opérations. • Matrice inverse d'une matrice carrée. • Exemples de calcul de la puissance n-ième d'une matrice carrée d'ordre 2 ou 3. • Écriture matricielle d'un système linéaire. • Suite de matrices colonnes (U_n) vérifiant une relation de récurrence du type $U_{n+1} = AU_n + C$: - recherche d'une suite constante vérifiant la relation de récurrence ; - étude de la convergence. • Étude asymptotique d'une marche aléatoire.

Le but de ce stage n'est pas de traiter le programme à la place de l'enseignant mais d'élargir leurs connaissances sur ces notions.

Pour cela, Mr Milliard a, en amont du stage, pris contact avec Mr Merlet afin de lui exposer ce que les élèves ont déjà vu en cours.

Pour aborder les différents thèmes, seulement les connaissances de base sur les matrices et les opérations de matrices suffisaient. Le thème 2 avait pour but de leur faire découvrir l'aspect de marches aléatoires et la notion d'état stable. Or, le 1er jour du stage nous nous sommes rendus compte que les élèves avaient déjà étudié cela en cours. Il y avait eu un petit malentendu entre Glenn Merlet et Hervé Milliard concernant les notions déjà vues par les élèves. Chaque tuteur s'occupant du thème 2 devait alors essayer de consolider ces bases en les amenant à découvrir d'autres aspects des marches aléatoires.

Nous avions par mail le sujet, les questions qui seront données aux élèves et les réponses pour mieux préparer le stage. J'ai également rencontré Glenn Merlet une semaine avant le stage afin qu'il m'explique ses attentes durant celui-ci.

L'organisation du stage fut la suivante : 24 élèves présents.

Les élèves ont constitué 6 groupes de 4 élèves. Chaque tuteur avaient deux groupes à charge et le responsable du stage et leur enseignant circulaient auprès de chaque groupe pour apporter une aide supplémentaire.

Pour ma part, je m'occupais d'un groupe de 4 filles (groupe 2) travaillant sur le thème 2 et d'un groupe de 4 garçons (groupe 1) ayant opté pour le sujet 1. Dans quasiment chaque groupe, l'homogénéité n'était pas présente. En effet, ce sont les élèves qui ont décidé de la disposition des groupes. Nous ne leur avions pas imposé des groupes afin que chaque groupe puisse travailler dans de bonnes conditions avec les personnes de leur choix afin de rendre le travail plus efficace.

Les deux premiers jours étaient consacrés à la partie recherche. Le but était vraiment de laisser chercher les élèves et de les guider dans leur travail sans leur donner la réponse. Nous pouvons éventuellement leur faire des petits rappels de cours. Le dernier jour, les élèves doivent réaliser un poster résumant leur découverte et les avancées de leur recherche. A la fin de la dernière journée, des chercheurs/doctorants de Luminy viennent regarder les posters et écouter les exposés des élèves relatant leur travail de recherche.

Déroulement du stage

Voici le déroulement des trois jours du stage avec le détail jour par jour des avancées de mes deux groupes.

1) Premier jour

Le stage a débuté le mercredi 30 mars 2016 à 9h30 par l'arrivée des élèves et de leur enseignant. Tout le monde s'est réuni dans une salle où Glenn Merlet, le responsable du stage, a présenté les trois thèmes en proposant des questions pour orienter les élèves dans leur recherche.

Thème 1 : explication pour obtenir la matrice d'adjacence à partir d'un graphe
Questions : Donner la matrice d'adjacence M
Que représente $(M^n)_{ij}$?
Que signifie $(M^n)_{ij}=0$?
Quelles sont les conditions nécessaires/suffisantes pour qu'il existe un entier n tel que $M^n=0$ ou $M^n>0$?

Thème 2 : explication graphe pondérée
Questions : Donner la matrice d'adjacence M.
Quelles types de matrices obtient-on ?
Où vont les marches aléatoires selon les points de départ sur le graphe, à n'importe quel temps ?

Groupe 1 :

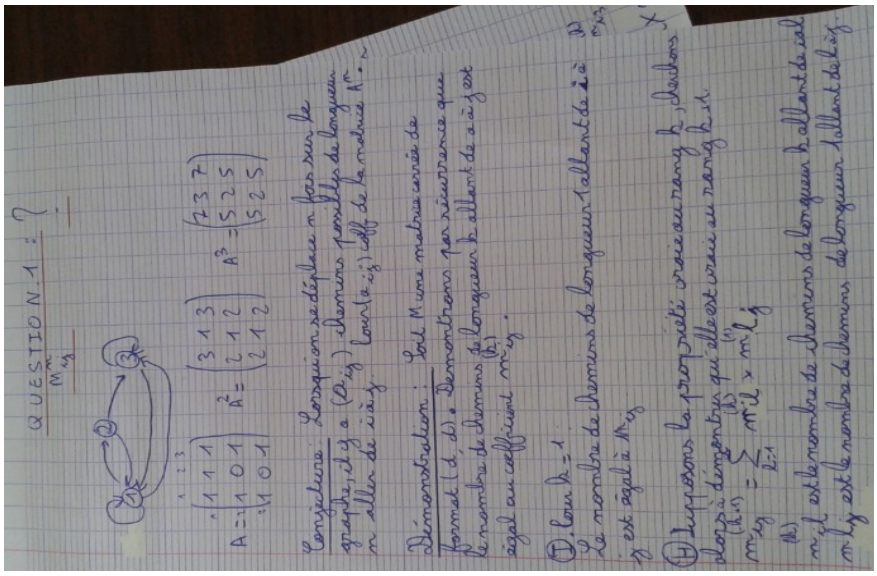
J'ai commencé par leur donner des graphes et je leur ai demandé de me donner la matrice adjacence associée pour voir s'ils avaient compris ce qui leur avait été expliqué au préalable. Cela n'a posé aucun problème.

Puis, je leur ai demandé de calculer quelques puissances de M pour qu'ils puissent exhiber une conjecture sur la signification de $(M^n)_{ij}$. Les élèves ont rapidement trouvé que cela correspond au nombre de chemins allant de i vers j de longueur n. La signification de $(M^n)_{ij}=0$ ou $(M^n)_{ij}>0$ devient alors évidente.

Je leur ai ensuite demandé quand a-t-on $M^n>0$? Un élève a pensé qu'il y avait un lien avec la taille d de la matrice et que cette puissance correspondait à d-1. Deux-trois exemples ont suffi à réfuter cette conjecture.

Ensuite j'ai demandé aux élèves de réfléchir à la question suivante : Si $M^n>0$ a-t-on $M^{n+1}>0$? La réponse a été oui à l'unanimité. En ce qui concerne la preuve, cela a été plus délicat car il fallait connaître la formule du produit de deux matrices A et B. Je les ai donc guidé pour la trouver avec le cas de matrices carrées de taille 2 puis de taille 3. Deux des élèves de ce groupe ont réussi avec mon aide à trouver cette formule. Les deux autres membres du cours ont eu plus de difficultés et n'ont pas réussi à trouver la formule. Ceux qui avaient réussi ont donc expliqué aux autres le résultat. Ainsi, avec un peu de difficultés, le groupe a pu conclure à la question posée initialement.

Voici la rédaction à cette question par un des membres du cours :



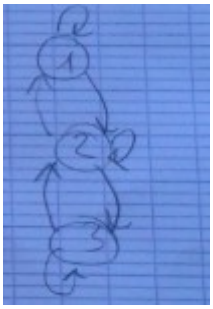
Afin de trouver des conditions pour lesquelles il y a une puissance dont tous les coefficients sont strictement positifs, le groupe pensait que cela avait un lien avec le nombre de boucles. S'il y a une boucle cela marche tout le temps mais cela peut se produire également sur des graphes où il n'y a aucune boucle.

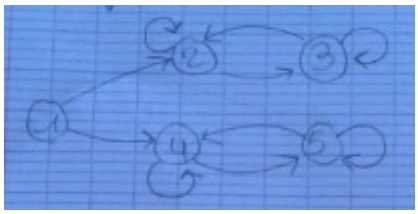
Cette observation a conclu le 1er jour de recherche du groupe 1.

<u>Groupe 2</u> :

Comme pour le groupe 1, j'ai commencé par leur donner des graphes et je leur ai demandé de me donner la matrice adjacence associée mais ici les graphes étaient pondérés. De même, les 4 membres du groupe avaient compris. Les propriétés relatives aux matrices d'adjacence ont été rapidement mises en évidence (somme des lignes égale à 1).

C'est à ce moment là que je me suis rendue compte qu'elles avaient déjà travaillé sur les marches aléatoires sur un graphe tout comme l'état stable. Avec Glenn Merlet, nous avons décidé d'approfondir leurs connaissances sur l'état stable et de se demander si on peut toujours se rendre sur un sommet à n'importe quel temps. J'ai donc fait travailler les élèves sur deux graphes suivants :


graphe 1


graphe 2

Le graphe 1 n'a pas posé de problèmes particuliers. En effet, les élèves ont rapidement compris qu'à tout moment on peut se déplacer sur n'importe quel sommet de ce graphe. Le calcul de l'état stable (1/3,1/3,1/3) a confirmé cette théorie.

Concernant le graphe 2, les élèves ont remarqué qu'au bout d'un moment, soit on reste dans le bloc du haut, soit on reste dans le bloc du bas. La résolution d'un système a prouvé qu'il y avait une infinité d'état stable. Cependant la solution trouvée ne correspondait pas avec les deux états stables (0,1/2,1/2,0,0) et (0,0,0,1/2,1/2) que l'on déduit facilement suite à la remarque précédente. En effet, le premier coefficient du vecteur était constant égal à 1/5.

Cela n'était pas logique en sachant qu'au bout d'un moment on ne pourra plus aller sur le sommet 1. Le premier jour s'est conclu avec cette erreur restée en suspend.

2) Deuxième jour

Le deuxième jour débuta également par l'arrivée des élèves à 9h30.

Groupe 1 :

J'ai lancé le groupe 1 sur la preuve que $(M^n)_{ij}$ correspond au nombre de chemins de longueur n allant de i vers j car cela était le souhait de leur enseignant.

Pour cela, il fallait une nouvelle fois utiliser la formule du produit de A et B. Deux élèves ont réussi et ont une nouvelle fois expliqué aux autres.

Puis ils ont réfléchi aux conditions pour qu'il existe une puissance n telle que $M^n=0$. Un des élèves a trouvé que lorsqu'on a un sommet isolé et pas de cycle alors $M^d=0$ où d est la taille de la matrice. La preuve était immédiate si on considère la signification de $(M^n)_{ij}$.

Ensuite, ils se sont demandés quand il existe une puissance n telle que $M^n>0$. Ils ont travaillé, le reste de la journée, sur la conjecture suivante : cela dépend du nombre de zéros dans la matrice.

Groupe 2 :

Les filles du groupe ont commencé par récapituler ce qu'elles avaient vu la veille. Puis, nous avons à nouveau réfléchi sur la solution du système trouvée la veille. Avec l'aide de Glenn Merlet, nous nous sommes rendus compte qu'elles utilisaient des vecteurs colonnes pour faire leurs calculs alors qu'il fallait utiliser des vecteurs lignes.

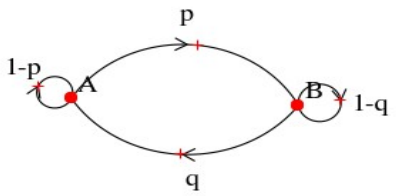
En effet, la définition de la matrice d'adjacence donnée le premier jour coïncidait avec celle des livres scolaires mais était différente de celle apprise par Glenn Merlet et moi-même. En effet, nous utilisions la transposée de cette matrice et par conséquent des vecteurs colonnes. Or, durant ce stage, il fallait faire attention à employer des vecteurs lignes ce dont j'avais omis de dire au groupe.

Une fois cette erreur rectifiée, les filles ont recommencé la résolution du système et ont, à nouveau, trouvé une infinité d'états stables mais cette fois-ci avec le premier coefficient égal à 0. Cela devient cohérent car, comme cela a été dit précédemment, au bout d'un moment on ne peut plus revenir sur le sommet 1 donc il ne peut pas y avoir de stabilité sur le sommet 1.

Pour continuer sur la notion d'état stable, j'ai demandé au groupe 2 de me donner la preuve du théorème suivant :

On considère une marche aléatoire de matrice de transition M sur un graphe à deux sommets où 0<p<1 et 0<q<1.

On a $M=\begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$



*Montrer que la suite des matrices colonnes (X_n) des états de la marche aléatoire converge vers un état stable X tel que X = M*X et que X ne dépend pas de l'état initial X_0.*

J'ai du les guider un peu pour la preuve en leur donnant notamment une suite qui intervient dans la preuve. Elles avaient de très bonnes notions de cours et ont abouti au résultat voulu.

Durant cette deuxième journée de recherche, les 6 groupes ont exposé aux autres leur travail de la veille et du matin. Le but de étant de les entraîner à s'exprimer au moyen des mathématiques afin de les rendre responsables et qu'ils puissent se considérer un peu comme des chercheurs en train d'exposer l'aboutissement de leur travail.

Dans l'après-midi de cette journée, un des membres de l'équipe de l'IREM est venu chercher à tour de rôle chaque groupe afin de leur montrer des posters des stages hippocampes précédents et qu'ils voient ce qu'ils devront réaliser le lendemain.

3) Troisième jour

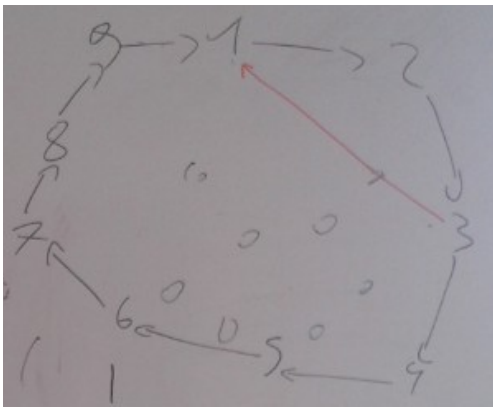
De même, la journée a débuté par l'arrivée des élèves à 9h30. La globalité des élèves étaient encore motivés à travailler.

L'objectif de cette journée était, avant tout, la création du poster et l'exposition en fin de journée devant des chercheurs/doctorants.

Groupe 1 :

Ce groupe a voulu continuer à chercher des conditions pour qu'il existe une puissance n tel que $M^n>0$. Après plusieurs exemples, ils ont vu que cela pouvait avoir un lien avec le pgcd des longueurs des chemins allant de i vers i, que celui-ci devait valoir 1.

En voici un exemple :

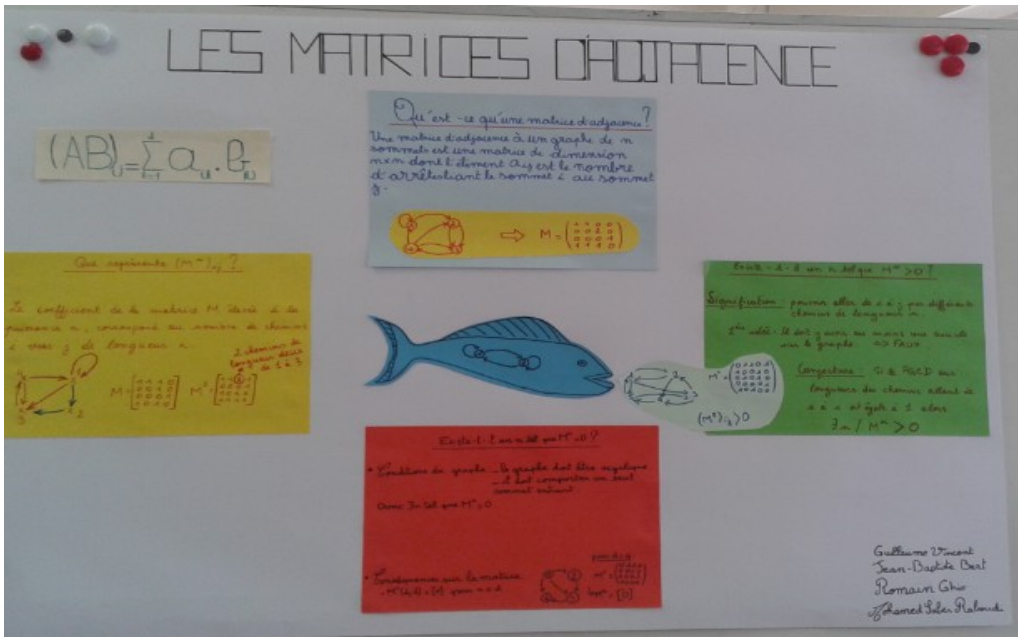


Pour aller du sommet 1 à lui-même, deux types de chemins sont possibles : le chemin (1;2;3;1) et le chemin (1;2;3;4;5;6;7;8;9;1).

Le premier chemin et de longueur 3 et le second de longueur 9.
Or, pgcd(3;9)=3 donc il y aura toujours au moins un 0 dans la matrice M^n pour n'importe quelle valeur de n.

Ce résultat est tout à fait correct mais nous ne pensions pas que les élèves arriveraient à le trouver. Le temps de recherche ce troisième jour a donc été bénéfique pour ce groupe.

Puis, les élèves ont commencé le brouillon du poster et ont attaqué la réalisation de celui-ci en début d'après-midi. Étant un groupe de garçons, ils ont eu un peu de mal à résumer les résultats qu'ils avaient trouvés et de mettre en forme cela sur un poster. Toutefois, le poster a été fini dans les temps et en voici le résultat :



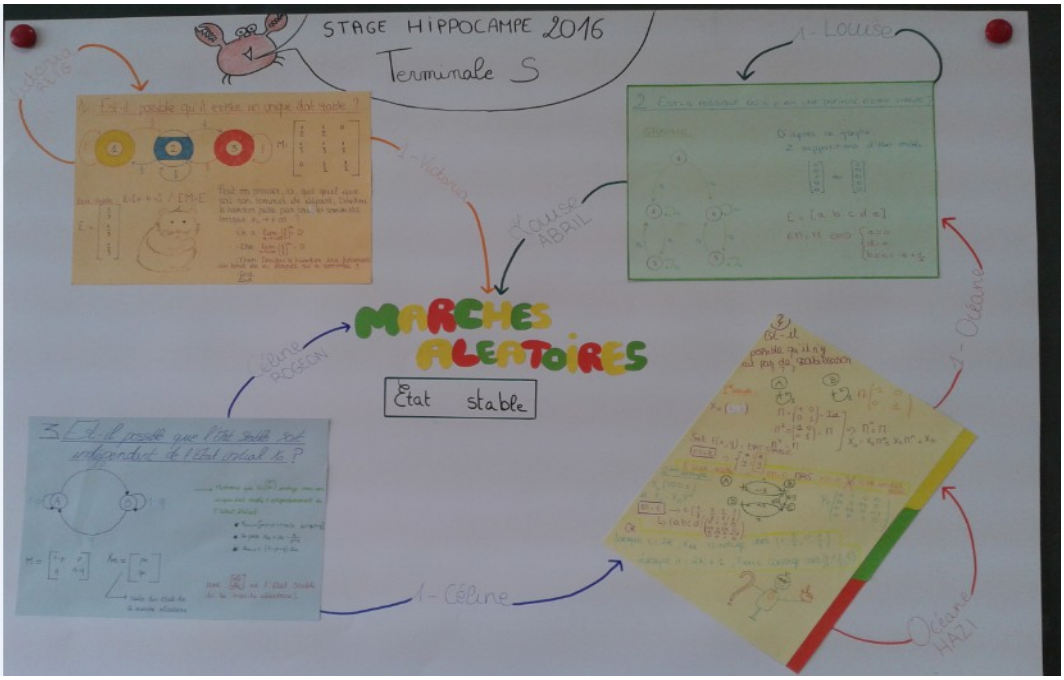
Pour information, le poisson au milieu est un petit clin d'œil à la dernière journée de recherche qui a eu lieu le vendredi 1er avril. En effet, Glenn Merlet trouvait dommage qu'aucun groupe ne fasse une référence à cette date. Ce groupe là a donc décidé de rajouter ce poisson sur leur poster.

<u>Groupe 2</u> :

Pour clôturer la fin de leur recherche, je leur ai proposé un dernier exemple de marche aléatoire où il n'y a pas d'état stable.

Ensuite, elles se sont lancées dans le brouillon de leur poster. Elles étaient très appliquées et organisées et se sont très bien réparties le travail. Un vrai travail de groupe a eu lieu une nouvelle fois entre elles durant la réalisation de ce poster.

Voici le poster qu'elles ont réalisé par la suite :



Durant la matinée, Arnaud Hilion, un des deux autres tuteurs est venu expliqué à chacun de mes groupes comment concevoir le brouillon de leur poster de façon optimale. Il avait déjà participé à plusieurs stages hippocampe et avait donc l'habitude de cela.

A 15h, les posters ont été finis et des chercheurs/doctorants de Luminy sont venus dans les salle afin d'observer le travail des élèves et écouter ce qu'ils avaient à dire sur leur poster. Une dizaine de personnes est venue assister à cette exposition et les élèves en ont été ravis.

Bilan personnel

Ce stage fut une très bonne expérience en tant que future enseignante. Ce qui a été très agréable durant ces trois jours, c'est d'avoir été traité de la même manière par les élèves que les autres enseignants malgré mon jeune âge. Les deux groupes dont j'avais la charge étaient très sérieux et m'écoutaient avec beaucoup d'attention.

Ce type de stage permet de faire travailler les élèves en groupe. L'avantage est que ce ne sont pas forcément les élèves brillants qui se distinguent durant ces trois jours.

Leur enseignant m'a dit que les filles du deuxième groupe avaient entre 10 et 13 de moyenne. Cela m'a surpris car leur travail était de qualité et leurs connaissances en mathématiques très solides. Ce fut globalement la même chose pour le groupe des garçons.

A l'issue de cette discussion avec leur enseignant, je me suis renseignée sur leurs orientations post bac et la moitié de ces élèves ne prévoyaient pas de faire des études de maths alors qu'ils ont fait preuve de beaucoup de dévouement durant ces trois jours à chercher des résultats mathématiques.

Ce que je retiens particulièrement de ce stage est le sérieux de l'ensemble des élèves. En effet, toutes les personnes ayant participé de près ou de loin à ce stage étaient unanimes pour dire que cette classe était modèle. Je partage ce sentiment pleinement.

J'ai cru comprendre que la gestion et la mise au travail de certaines classes de collège étaient plus délicates notamment avec des établissements un peu plus difficiles.

Ma satisfaction à la fin du stage est d'avoir entendu des élèves se dire entre eux qu'ils étaient contents de ce stage et surtout qu'ils avaient appris de nouvelles choses durant celui-ci.

En effet, cela a eu pour but de leur montrer une vision du métier de chercheur qui est importante pour avoir un regard différent sur les mathématiques.

Annexe : sujet du stage

Marches sur les graphes finis : plus courts chemins, marches aléatoires et matrices.

Stage Hippocampe du 30 mars au 1er avril.

1 Introduction

Le thème général est l'exploration du lien entre graphes et matrices.

À un graphe fini orienté G dont les sommets (ou noeuds) sont numérotés de 1 à n, on associe classiquement sa matrice d'adjacence M tq $M_{ij} = 1$ si G contient l'arc $i \to j$ et les autres coefficients sont nuls. Si on autorise les arcs multiples (plusieurs arcs de i vers j), on met le nombre d'arcs de i vers j.

On peut aussi autoriser des poids quelconques sur les arrêtes. On parle alors de graphes pondérés, et on retrouve toutes les matrices ! Il est alors pratique de mettre une valeur $+\infty$ ou $-\infty$ quand il n'y a pas d'arc (ou de se restreindre à des poids positifs). Un cas particulier est celui des chaines de Markov, où on met sur $i \to j$ la probabilité de passer de i à j quand on est en i.

2 Thème 1 : Puissances des matrices d'adjacence

La question générale est : que peut-on dire des puissances du M de l'introduction ? En particulier, peut-on exprimer les coefficients de M^n en fonction du graphe ? (C'est le nombre de marches de i vers j de longueur$n$) Que dire des zéros de M^n ?

On peut alors retrouver les notions de matrice irreductible, cyclicité, primitivité, et comment elles s'articulent. Eventuellement le rayon spectral, mais ça me semble difficile à inventer.

3 Thème 2 : Produits tropicaux

Si on remplace les opérations d'addition par des min et de multiplication par des +, on peut définir le produit, dit tropical, de deux matrices comme suit :

$$(A \boxtimes B)_{ij} := \min_k (A_{ik} + B_{kj}).$$

et donc les puissances.

Les arcs peuvent porter n'importe quel poids.

Questions :

Peut-on exprimer les coefficients de M^n en fonction du graphe ? (C'est le poids maximum des marches de i vers j de longueur n)

Les arcs peuvent porter n'importe quel poids, mais comment exprimer l'absence d'arc ? (par un $+\infty$)

Comment croissent les $M^{\boxtimes n}$? (Comme le poids moyen minimal des circuits du graphe)

4 Thème 3 : Marches au hasard sur le graphe

Si on se donne maintenant un graphe et des probabilités de passer d'un noeud donné à un autre (i.e. d'emprunter un arc).

On peut alors se demander À quoi ressemblent les matrices ?

Où vont les marches ? (on retombe sur des questions d'irredutibilité et décomposition en composantes fortement connexes) Peut on aller en j en 4 coups à partir de i ? (cyclicité)

Quelle est la probabilité d'aller en j en 4 coups à partir de i (Formule)

Quelle proportion du temps on passe dans chaque état "à long terme" (Mesure invariante)