Gwladys FERNANDES

Prépa agreg CMI

Année 2013/2014

Rapport du stage hippocampe réalisé à l'IREM de Luminy les 19,20 et 21 mai 2014

Lundi 19 mai, dix heures, début de la première journée de stage. Les trente et un élèves de première S, venant d'Arles pour l'occasion, sont rassemblés dans une salle et Monsieur Yves Laffont, mon tuteur prend la parole pour introduire le sujet du stage : les matrices. Il avait réalisé des diapositives introduisant le vocabulaire lié aux matrices et présentant les bases du calcul matriciel. Il était question des mots commutativité, associativité, élément neutre, inverse, présentés dans le cadre des nombres réels que les élèves ont déjà manipulés, ceci dans le but d'utiliser ensuite ces mots dans le cadre des matrices, objets inconnus des élèves en première. Yves Laffont a également introduit le mot scalaire ainsi que les règles pour la multiplication entre matrices, le produit d'une matrice par un scalaire, par un vecteur, puis l'adition entre matrices, tout ceci dans le cadre des matrices 2X2.

Peu avant midi, Yves Laffont termine son exposé en indiquant aux élèves qu'ils devront se répartir en groupes de cinq (il y aura un groupe de six) et choisir le sujet qu'ils ont envie de traiter parmi les six ateliers suivants : calcul matriciel, puissances, inverse, interprétation géométrique, matrices élémentaires, matrices rectangulaires.

Après manger, les six groupes d'élèves choisissent leur sujet et sont répartis dans trois salles (deux groupes par salle). Je suis chargée de l'accompagnement de Ines, Ines (deux Ines dans ce groupe !), Noémie, Vincent et Dorian, un groupe qui a choisi les matrices élémentaires ; ainsi que de Donna, Marie, Sean, Jules et Jeff, un groupe qui a choisi le calcul matriciel. Les quatre autres groupes d'élèves sont sous la responsabilité de Benjamin, un étudiant en thèse au CMI, et de Gino.

Yves Laffont avait précisé que tous les groupes devaient commencer par dresser la table de multiplication des matrices nulle, identité et des quatre matrices de base et c'est ce que je commence par demander aux deux groupes.

Le premier groupe : matrices élémentaires

Une fois la table de multiplication réalisée, je demande au groupe de trouver le lien entre les matrices et le système linéaire qui avait été proposé par Yves Laffont dans son introduction, à savoir :

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \end{cases}$$

$3x + 4y = 1$

Système qu'il avait résolu au tableau à l'aide de la méthode du pivot de Gauss, que les élèves ont déjà vu sous le nom de « résolution d'un système par combinaison ». Cependant, Yves Laffont ne finit pas la résolution de façon classique : après avoir supprimé les « y » en remplaçant la deuxième ligne par la deuxième ligne moins deux fois la première, obtenant :

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x = -9 \end{cases}$$

il réitère la méthode pour supprimer le « x » de la première équation, obtenant :

$$\begin{cases} 2y = 14 \\ x = -9 \end{cases}$$

puis :

$$\begin{cases} y = 7 \\ x = -9 \end{cases}$$

enfin, il échange les deux lignes :

$$\begin{cases} x = -9 \\ y = 7 \end{cases}$$

Je demande alors aux élèves de trouver comment passer de la matrice du système 1 à celle du système2, c'est-à-dire par quelle matrice multiplier la matrice A1 pour trouver A2, la matrice du deuxième système. Les élèves

commencent à chercher mais ne voient pas bien comment faire, je simplifie alors légèrement le problème en leur demandant de trouver comment on passe d'une matrice A à la matrice obtenue en remplaçant la première ligne de A par trois fois cette même ligne en leur donnant une matrice A en exemple. Les recherches reprennent ; je les amène à voir l'importance du nombre 3 par lequel la première ligne de A est multipliée, et les élèves tentent plusieurs matrices contenant un 3, mettant principalement des zéros pour les autres coefficients des matrices, ce qui ne donne aucun résultat concluant. Je leur demande alors comment ils pourraient faire pour conserver la deuxième ligne de A, à quel nombre on peut penser pour sauvegarder quelque chose et ils pensent au nombre 1. Ils cherchent à nouveau mais ne trouvent pas encore. Ils ont toujours multiplié la matrice A à droite, et je leur rappelle ce qu'ils ont remarqué sur la non commutativité du produit matriciel, ils essayent alors de multiplier à gauche et trouvent la solution ! Je leur fait alors remarquer que la multiplication à gauche permet d'agir sur les lignes alors que celle à droite agit sur les colonnes. Je leur demande alors de faire la même chose pour passer d'une matrice A à une matrice obtenue en remplaçant la deuxième ligne de A par la somme des deux lignes de A. Une fois qu'ils ont établi le résultat, je les recentre sur le système qui nous occupe et ils trouvent rapidement comment passer de A1 à A2 et ainsi de suite jusqu'à la dernière matrice associée au dernier système : A5 qui est la matrice identité.

La journée se termine. Le lendemain, on résume ce que l'on a fait la veille et je leur demande de voir ce que l'on peut faire pour résoudre le système, que faire avec le vecteur u1=

5

1

pour trouver la solution du système, donnée par u5=

7

-9

Après un peu de recherche, ils voient qu'ils font les mêmes opérations que sur les matrices.

Je leur demande ensuite de trouer l'inverse de la matrice A1 avec tout ce que l'on vient de faire, après leur avoir demandé de me donner la définition de l'inverse d'une matrice. Je les laisse chercher et quand je reviens, ils sont en train d'essayer différentes combinaisons de matrices en ne sachant pas trop comment procéder, je leur dit qu'en général, il est difficile de trouver l'inverse d'une matrice « comme ça » et je leur rappelle qu'on a trouvé l'identité à la fin de la suite de matrices associées au système à résoudre, l'identité intervenant dans la définition de l'inverse. Ils trouvent alors la solution.

La matinée s'achève sur cette découverte.

Deuxième groupe : calcul matriciel

La table de multiplication ayant été réalisée, j’amène les élèves à réfléchir sur les propriétés du produit matriciel et notamment par comparaison avec les réels. Ils remarquent la non commutativité et donnent un contre-exemple à l’aide de la table. Ils notent que le produit par l’identité ne change pas la matrice par laquelle on la multiplie, et que l’identité commute avec tout le monde, de même que la matrice nulle. Je les oriente alors vers la géométrie, dans le but de les éloigner des calculs qu’ils commencent à trouver besogneux. Je leur demande par quel vecteur on doit multiplier une matrice pour retrouver la première colonne, puis la deuxième. Je leur demande alors de trouver l’effet de la matrice

0 1

1 0

sur les vecteurs de base qu’ils viennent de mettre en évidence, en leur demandant de venir au tableau pour faire un dessin. Ils constatent que les vecteurs de base sont échangés et je leur demande de trouver la transformation géométrique dont il s’agit. Ils pensent à une rotation d’un quart de tour en voyant que cela a l’air de marcher pour le premier vecteur de base qui est en effet déplacé d’un quart de tour dans le sens trigonométrique. Je leur demande alors de me dire quel serait dans ce cas l’image du deuxième vecteur de base et ils constatent que cela ne correspond pas à la situation étudiée puisque le deuxième vecteur ne serait alors pas envoyé sur le premier vecteur de base. Ils pensent alors à la symétrie axiale par rapport à la première bissectrice, ce qui est la solution. Au cours d’une discussion que le groupe a par la suite avec Yves Laffont sur les notions de neutre et d’inverse, nous nous rendons compte que les élèves confondent la notion d’opposé et d’inverse dans le cadre des réels, confusion qui se répercute évidemment sur les opérations matricielles. De même, la notion du neutre n’est pas bien intégrée, les élèves ne faisant pas clairement le distinguo entre l’addition et la multiplication et n’arrivant pas par conséquent à définir clairement les propriétés du zéro et du un. La journée s’achève sur cela.

Le lendemain, je décide de leur faire reprendre toutes ces notions. Je leur donne un tableau à compléter :

	REELS			
	Commutativité	Associativité	Neutre	Inverse
Addition				
Multiplication				

	MATRICES			
	Commutativité	Associativité	Neutre	Inverse
Addition				
Multiplication				

Ils complètent alors le tableau en m’expliquant à l’oral comment ils procèdent, et s’approprient ainsi petit à petit les différentes notions en jeu, en donnant des exemples et des contre-exemples. Je leur fait également remarquer que le produit de deux matrices non nulles peut quand même donner la matrice nulle, ce qui n’est pas le cas pour les réels et ils me trouvent des exemples à l’aide de leur table de multiplication.

L’une des dernières cases complétées est l’associativité du produit matriciel. Jugeant la démonstration générale trop calculatoire, je leur propose de vérifier cette propriété sur un exemple en leur précisant qu’il ne s’agit pas d’une preuve. Je leur donne trois matrices A, B et C que j’explicite au tableau et répartis les calculs en deux groupes : l’un chargé de réaliser les calculs en calculant (AB)C et le deuxième chargé de calculer A(BC). Ils comparent alors leurs résultats respectifs et constatent que les deux groupes ont trouvé le même résultat.

Ces notions ayant été intégrées, je les oriente vers les quatre matrices de base, qu’ils appellent E,F,G,H sans que le mot « base » ait encore été prononcé (Yves Laffont l’avait évoqué dans sa présentation). Je leur demande pourquoi ces matrices sont importantes et leur dit que l’on peut construire n’importe quelle matrice avec ces quatre matrices. Je les laisse réfléchir en leur demandant de m’écrire une matrice

a b

c d

quelconque en fonction de E,F,G,H.

Les lettres ayant l’air de poser problème, je leur demande de me trouver un lien entre la matrice

2 0

0 0 = A

Et les matrices E,F,G,H. Ils voient alors qu’il s’agit de deux fois la matrice E. Je leur pose la même question avec les matrices obtenues en modifiant l’emplacement du 2 dans la matrice A et ils trouvent qu’il s’agit de deux fois les matrices F,G et H respectivement. Ils généralisent alors le résultat à la matrice A et je leur dit que ces matrices sont appelées les matrices de base.

J’oriente alors la réflexion sur l’inversibilité et leur demande si tous les réels sont inversibles et ils me disent que la seule exception est 0. Je leur demande si c’est la même chose pour les matrices. Ils me proposent de regarder les matrices intervenant dans la table de multiplication qu’ils ont établie : la matrice nulle, identité E,F,G et H. Ils constatent que la matrice nulle ne peut pas être inversible puisque le résultat du produit de n’importe quelle matrice par la matrice nulle redonne la matrice nulle. Ils voient également à l’aide de la table de multiplication que l’identité est inversible, étant son propre inverse. Ils s’intéressent alors à E et je les guide en leur demandant de calculer le produit de E et d’une matrice quelconque

a b

c d

Ils trouvent alors

a b

0 0

Et constatent que le zéro en bas à droite empêche le produit d'être égal à l'identité. Ils en concluent que E n'est pas inversible et qu'il en sera de même pour F,G et H. Je leur demande alors des exemples simples de matrices inversibles. Ils ne voient pas trop comment construire une matrice « simple » et je leur donne alors l'exemple d'une matrice diagonale en leur demandant de trouver son inverse, ceci sur l'exemple :

2 0

0 4

Après quelques tâtonnements, ils trouvent la solution. Je leur demande alors de me donner une interprétation géométrique en allant au tableau et en rappelant comment sont transformés les vecteurs de base par la matrice : respectivement par la première et la deuxième colonne de la matrice. Ils constatent alors que la matrice a pour effet de multiplier la longueur et la largeur par 2 et 4 respectivement et me disent même que par conséquent l'aire d'une surface sera multipliée par 8. Ils me demandent alors de revenir sur la symétrie axiale que l'on avait vue la veille et font un dessin au tableau pour retrouver le fait qu'il s'agit de la symétrie axiale d'axe la première bissectrice.

Je leur donne ensuite l'exemple d'une matrice avec des vecteurs colonnes colinéaires et leur demande de me trouver une relation entre les coefficients de la matrice, sachant qu'ils ont vu en cours que « le produit en croix » des coefficients des vecteurs colinéaires est nul : ils retrouvent alors sans que je la nomme la notion de déterminant.

La matinée s'achève la-dessus.

L'après-midi, chaque groupe doit présenter à 14h30 ce qu'il a fait jusque là à l'ensemble de la classe. Mes deux groupes s'entraînent alors de 13h30 à 14h30 et se répartissent les éléments qu'ils présenteront. La présentation se passe bien, chaque groupe essayant d'expliquer au mieux ce qu'il a compris à leurs camarades, insistant à leur guise sur les points qui les ont plus particulièrement intéressés et la journée s'achève là-dessus.

Mercredi 21 mai, dernier jour de stage

Les élèves doivent réaliser un poster, c'est-à-dire coller sur une grande feuille des feuilles colorées et cartonnées sur lesquelles ils doivent écrire les différents résultats, constats, démonstrations, notions, qu'ils ont étudiés au cours des deux jours précédents. Une fois ces posters réalisés, ils sont affichés dans chaque salle et des chercheurs de l'IREM circulent dans les salles pour les voir. Les élèves leur

expliquent alors le travail qu’ils ont fait en s’appuyant sur leur poster et les chercheurs leur posent ensuite des questions.

Après cette séance d’échange avec les chercheurs, on va tous assister à une conférence sur les sports extrêmes que le conférencier met en lien avec la courbure et les fractales, conférence égrenée d’extraits vidéos et de situations concrètes qui parvient à capter l’attention des élèves.

Ce stage m’a beaucoup appris sur la pédagogie. J’en retiens qu’il est parfois difficile de rendre les mathématiques passionnantes aux yeux des élèves mais que cela est possible en les faisant réfléchir à des situations concrètes et en éveillant leur curiosité sur des sujets qu’ils ne connaissent pas tout en les laissant construire leur savoir par eux-mêmes.