**Negri**

**Gino**

# Rapport de stage

## Introduction

J'ai effectué un stage hippocampe sous la direction de Yves Lafont du lundi 19 mai au mercredi 21 mai au campus de Luminy. Nous avons accueilli un classe de 1ère S venant d'Arles, et nous étions trois tuteurs à encadrer les élèves. Le thème du stage était « Les Matrices ». L'approche était plutôt théorique. Nous étions uniquement dans le cadre des matrices carrées d'ordre 2. Au début du stage, lors de la présentation du thème, Yves Lafont a défini quatre différentes opérations sur les matrices :le produit d'une matrice et d'un vecteur, le produit de deux matrices, l'addition de deux matrices, et la multiplication d'une matrice par un scalaire. Cinq sujets ont été proposés aux élèves :

1. Le calcul matriciel

Dans ce sujet, les élèves étaient amenés à se familiariser avec les différentes opérations sur les matrices qui ont été introduites à la présentation du thème. En s'inspirant de l'ensemble des réels, ils devaient définir les règles de calculs de ces opérations.

2. Les puissances de matrices.

Plusieurs matrices particulières étaient proposées, et les élèves étaient invités à étudier leur puissances. Parmi les matrices données, il y avait la matrice d'une symétrie orthogonale, d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ , d'une matrice diagonale, et d'une matrice triangulaire supérieure.

3. Les inverses

Dans ce sujet, les élèves étaient invités à donner la définition de l'inverse d'une matrice (en s'inspirant des réels), à calculer l'inverse d'une matrice, à déterminer l'inverse d'un produit de matrices, et à définir les puissances négatives.

4. représentations géométriques

Certaines matrices étaient proposées, et les élèves devaient chercher quels effets ont ces matrices sur les vecteurs tout en faisant des interprétations géométriques. Des transformations géométriques étaient aussi proposées, et les élèves étaient amenés à chercher les matrices correspondantes.

5. matrices élémentaires

Dans ce sujet, il y avait un système de deux équations linéaires à deux inconnues que les élèves devaient résoudre par la méthode du pivot de Gauss. Ils devaient ensuite faire le lien entre la démarche mise en œuvre et les matrices.

La classe a été partagée en six groupes, et deux d'entre eux ont eu un sujet en commun : le calcul matriciel. J'ai été chargé de m'occuper de l'un de ces deux groupes, et du groupe ayant choisi le sujet sur les inverses.

Le rapport sera composé de trois parties. Dans un premier temps, je présenterai le travail effectué par mon groupe sur le calcul matriciel, puis je m'intéresserai aux recherches réalisées par les élèves sur l'inverse d'une matrice pour enfin décrire l'exposition des divers travaux entrepris durant ce stage.

# I. calcul matriciel

À l'instar des autres groupes, les élèves ont commencé par dresser une table de multiplication entre les matrices suivantes : la matrice nulle, la matrice identité, et les éléments de la base canonique des matrices carrées d'ordre deux. Cela leur a permis de se familiariser avec le produit matriciel qui n'est pas une opération naturelle. En effet, lors de la présentation du thème, nous avons demandé comment la multiplication de deux matrices pourrait être défini, et les élèves ont été tentés de donner pour réponse un produit qui se ferait coefficients par coefficients. La construction de cette table de multiplication leur a également permis de constater rapidement que le produit matriciel n'était pas commutatif. Yves Lafont avait distribué un résumé de la présentation du stage, dans lequel figuraient les règles que vérifie la multiplication dans l'ensemble des réels. Les élèves ont ainsi été amenés à vérifier si les règles vraies pour les réels restaient encore vraies pour les matrices. De manière global, ils ont procédé en regardant des exemples simples, puis en faisant des conjectures, et enfin en faisant des démonstrations pour

montrer que la conjecture est vrai, ou en trouvant un contre exemple dans le cas contraire. Ils ont par exemple montré que le produit de matrices n'est pas commutatif, qu'il est associatif, que l'identité est le neutre (« joue le rôle du 1 »)...

Une fois le produit matriciel étudié, le groupe s'est intéressé à l'addition des matrices. Là encore, en se basant sur ce qui se passe chez les réels, les élèves ont cherché si ce qui est vrai pour l'addition de deux réels reste encore vrai pour les matrices. Ils ont également établi des règles pour le produit d'une matrice par un scalaire, notamment la distributivité, chose qu'ils ont ensuite vérifié pour le produit matriciel.

Pour terminer le groupe est revenu sur l'histoire de la non-commutativité, en remarquant que par exemple l'identité commute avec toutes les autres matrices. De là, en s'inspirant de la « forme » de l'identité, ils ont étés amenés à étudier les matrices diagonales. Les élèves ont réussi à montrer que les homothéties commutent avec toutes les matrices, mais qu'une matrice diagonale avec deux éléments distincts sur la diagonale ne vérifie pas forcement cette propriété (et pour cela ils ont trouvé un contre exemple).

# II. L'inverse d'une matrice

Les élèves ont commencé par dresser une table de multiplication entre les matrices suivantes : la matrice nulle, la matrice identité, et les éléments de la base canonique des matrices carrées d'ordre deux. Cela leur a permis de se familiariser avec cette nouvelle opération. À partir de cette table, ils ont conjecturé que l'identité était le neutre de produit matriciel, chose qu'ils ont ensuite démontré. En se rappelant de la définition d'un inverse pour les réels, en en remarquant que l'identité « joue le rôle du 1 », le groupe a pu donner la définition de l'inverse d'une matrice.

Les élèves se sont ensuite mis à chercher à calculer l'inverse de certaines matrices simples. Ils ont commencé par chercher l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et ont trouvé que c'était impossible. Ceci leur a permis d'observer qu'il existe des matrices non nulles qui ne sont pas inversibles. Ils ont traité comme autres exemples la matrice identité et la matrice la forme $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, auxquelles ils ont réussi à trouver l'inverse. Ils ont ensuite calculé l'inverse de quelques matrices diagonales. À partir de ces exemples ils ont émis une

hypothèse sur la façon de calculer l'inverse d'une matrice diagonale, puis ont démontré ce qu'ils avaient conjecturé.

Le sujet invitait les élèves à chercher à quoi est égale l'inverse d'un produit de matrices AB. En s'inspirant de ce qui se passe pour les réels, ils ont pensé que l'on devrait avoir l'égalité suivante : $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$. Ils ont commencé à regarder si ce résultat était vrai pour deux matrices inversibles qu'ils ont trouvé auparavant : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ . Ils se sont rendu compte qu'il n'y avait pas égalité, et durent chercher une autre réponse. Constatant que le produit matriciel n'est pas commutatif, un élève a supposé que l'égalité était peut-être : $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. le groupe a donc repris l'exemple étudié, et a montré que cette fois-ci il y avait égalité. Voyant que la formule avait l'air vrai, les élèves ont ensuite cherché à démontrer cette relation, et ils y sont parvenus.

Pour terminé, le groupe a défini les puissances négatives n-ème d'une matrice à partir de l'inverse, comme étant le produit de l'inverse de cette matrice par elle-même répétée n fois. Ils ont enfin montré que $(A^{-1})^n=(A^n)^{-1}$.

# III. Les exposés

Dans l'après-midi du deuxième jour, les six groupes ont présenté leur recherches devant toute la classe, afin que chacun ait conscience du travail effectué par l'ensemble des élèves.

Le dernier jour du stage fut consacré à la préparation des posters, puis à leur exposition. Le matin, les élèves de chaque groupe se sont concerté pour décider de ce qu'ils allaient mettre, puis ont fait un schéma du poster sur le tableau. Enfin, débordant d'idées et d'imagination, ils se sont mis à la lourde tache qu'est l'élaboration du poster. Concernant mes groupes, l'affiche des élèves ayant travaillé sur les inverses a eu pour titre « ECIRTAM » (« MATRICE » à l'envers), tandis que ceux chargés du calcul matriciel ont partagé le poster en trois parties : à gauche les règles du produit matriciel, à droite celles de l'addition, et au centre la distributivité.

L'après-midi du dernier jour, les posters ont été affichés sur les mur, et quelques chercheurs sont venus les observer, tout en écoutant les explications des élèves, fiers de ce qu'ils avaient entrepris.

# Conclusion

Le thème proposé pour le stage hippocampe était à mon avis trop théorique, et il aurait peut-être été mieux de présenter un application concrète des matrices pour que les élèves se rendent mieux compte de l'utilité des ces objets là. Cet aspect trop théorique a quelque fois un peu découragé les élèves, mais ils se sont quand même bien prêtés au jeu, et on effectués un très bon travail.

J'ai personnellement vécu une expérience tout aussi merveilleuse qu'intéressante. Ça a été un plaisir d'observer les élèves faire des recherches ensemble, et de les voir expliquer avec fierté ce qu'ils avaient trouvé. Les élèves étaient tous sympathiques, et j'ai vécu un très bon moment avec eux.