Sebastien Distefano
Arthur Renaud

STAGE HIPPOCAMPE

10-11-12 Décembre 2013

Responsable :

Pierre Guillon

Tuteurs :

Tarek Sellami

Sebastien Distefano

Arthur Renaud

I Introduction

a) Le Stage hippocampe

Un stage Hippocampe consiste à accueillir une classe de lycéens pendant trois jours consécutifs, à l'université, pour une initiation à la recherche en Mathématiques. Encadrés par des chercheurs, les élèves réfléchissent sur des problèmes de mathématiques, en lien avec les thèmes de travail du chercheur responsable du stage. Ils posent des questions et élaborent des hypothèses, puis ils expérimentent, discutent, débattent et communiquent, comme le font quotidiennement les chercheurs dans leur activité. Enfin, ils présentent leurs travaux à d'autres chercheurs lors d'une séance de posters.

La classe reçue est la classe de Mme. Martine LAMBERT, une Terminale S du Lycée La Méditerranée (La Ciotat).

Les 31 élèves ont été subdivisés en 6 groupes de 3 à 4 abordant chacun un thème, chaque tuteur devant se charger de deux groupes.

b)Le thème abordé

Le thème choisi pour ce stage est hippocampe est « les pavages ».

Un pavage est une partition d'un espace (ici le plan) par des éléments d'un ensemble fini, appelés tuiles (plus précisément, ce sont des compacts d'intérieur non vide).

Ce thème a été divisé en cinq sous catégories étudiées par différents groupes pendant le stage :

- Les pavages périodiques
- Les pavages apériodiques
- Groupe sur les pavages du plan

c) Organisation du thème

Globalement l'organisation pour les 6 groupes a été les mêmes :

- 1er jour : Après une introduction générale du professeur, les élèves ont commencé à se familiariser avec la catégorie qu'ils ont choisie, sans forcément prendre de notes.

  Le but est principalement de se questionner sur le sujet, soulever les enjeux, et se donner une ligne directrice de travail pour les jours suivants.

- 2nd jour : les élèves approfondissent les recherches de la veille, des notes sont prises.

- 3ème jour : En début de matinée, ils finissent leurs travaux de la veille, organisent leurs notes. Le but est alors de prendre du recul de voir le travail accompli mais aussi d'anticiper les éventuelles questions qui pourraient être posées lors de la présentation, voir les limites de leur recherches (points inexplorées, questions ouvertes...)

  Enfin de matinée, les élèves commencent à préparer le poster qui servira, en fin d'après-midi, de support lors de l'exposition de leurs recherches au près des chercheurs, et ultérieurement au sein de leur lycée.

II Auprès des élèves

a) Compte rendu d'Arthur

i) Groupe sur les pavages périodiques

Dans un premier temps les élèves essaient de construire quelques pavages périodiques basiques pour se donner une idée de la situation.

Cela fait, je leur propose de se donner des pistes de recherches sur leur sujet.

Je choisis délibérément pour se groupe de ne pas passer trop de temps sur la définition de la périodicité, l'importance de ce thème se trouve plus, selon moi, dans l'étude pratique que théorique.

Ainsi les élèves ont déterminés les points importants de leur recherche : Choix des formes, possibilité ou non de les retourner, trouver plusieurs pavages distincts pour une même figures.

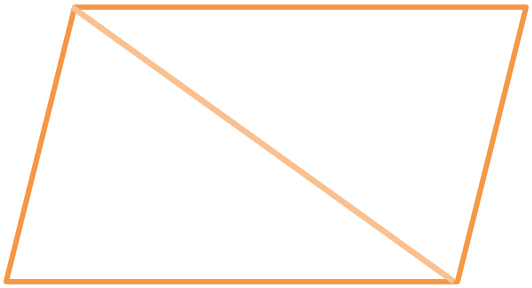
Choix des figures étudiées : Ce choix part chronologiquement de cas particuliers pour ensuite se généraliser de plus en plus.

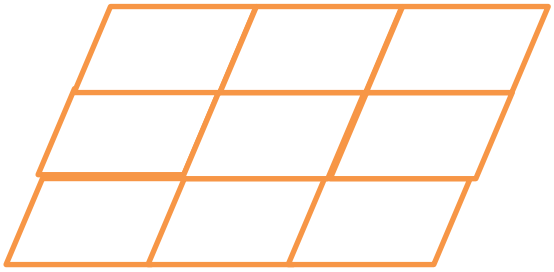
- triangles : équilatérales, isocèles, quelconques
- quadrilatères : carrés, rectangle, parallélogrammes, quadrilatères
- polygones réguliers.

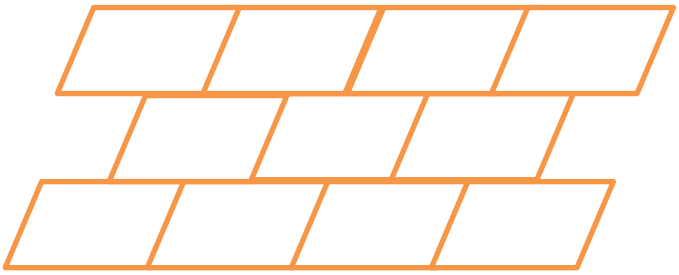
Le cas des triangles est vite réglé :

Pour un triangle quelconque : 2 triangles dont l'un est la rotation de 180° par le milieu d'un des côtés, donne un parallélogramme. Ce cas-là est étudié ci-dessous.

Pour les carrés, rectangles et parallélogrammes on a des pavages du type :







Le groupe a ensuite réussi à montrer que les quadrilatères ne sont pas forcément tous pavables :

Elles ont utilisé un raisonnement par condition nécessaire en essayant tous les cas possibles.

Par exemple un tel quadrilatère n'est pas pavable.

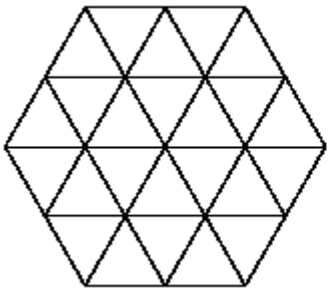
Enfin le groupe a essayé de trouver quels polygones réguliers étaient pavables. Après plusieurs recherches, ils se rendent compte que le pavage nécessite une condition nécessaire sur les angles : l'angle du polygone régulier doit être un diviseur de 360.

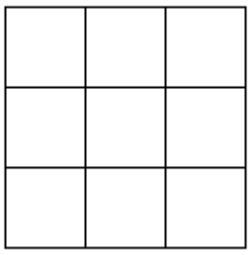
Ainsi après leur avoir donné quelques pistes les élèves se sont rendu compte qu'ils pouvaient trouver la valeur des angles des polygones explicitement par la formule : An = (n-2)*180/n.

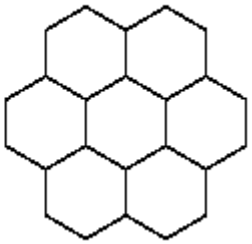
Ou An est un angle d'un polynôme à n degré.

On se rend compte que la formule marche quand vaut 3 4 ou 6 puis que c'est solutions sont les seules : en effet n=5 ne marche pas et si n>6 alors 120<An<180 donc la condition nécessaire n'est pas remplie.

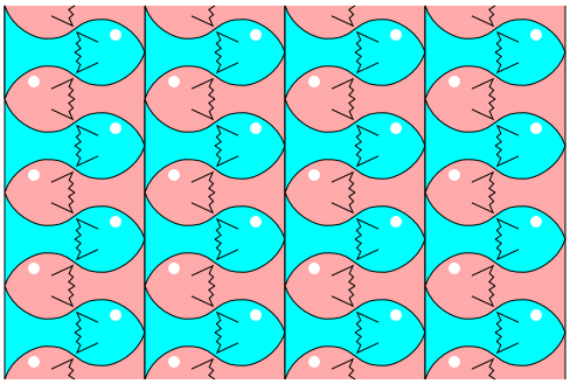
Le seul cas qui n'a pas encore été étudié est celui de l'hexagone, le groupe vérifie rapidement que cette condition nécessaire est suffisante c'est-à-dire que l'on peut faire un pavage d'hexagones.







Enfin parallèlement un second travail a été mené parallèlement sur les modifications des briques d'un pavage :

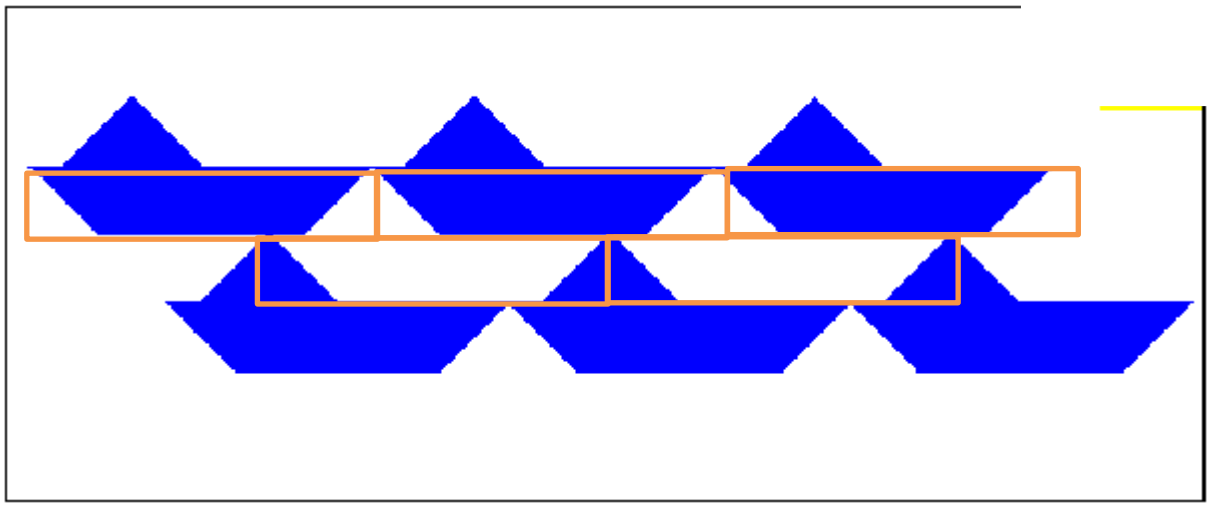


Comment à partir d'un pavage simple, obtenir un pavage plus « sophistiqué » ?

Cette activité n'a pas été très approfondie, ce qui a été remarqué est principalement que l'on peut modifier assez aisément un pavage :

Par exemple si l'on souhaite ajouter un triangle à droite de ce rectangle, il suffit d'enlever le même rectangle à gauche pour que le pavage reste possible.

Ainsi en modifiant ce pavage rectangulaire (en orange), on peut aisément obtenir un pavage du type suivant :



ii) Groupe sur les pavages apériodiques

Avec ce groupe là j'insiste bien sur les définitions même de la périodicité, et des vecteurs de périodicité.

Le but dans un premier temps est de trouver une bande de pavage apériodique et d'expliquer leur raisonnement.

Apres avoir trouvé une telle suite je leur fait remarqué qu'au lieu de dessiner des briques différentes :

Ils peuvent les appeler briques « 0 » et « 1 ».

Ces notations seront conservées pour des raisons pratiques.

La suite trouvée est la suivante 0100110001110000111111…

Ils m'expliquent que l'on peut démontrer que la suite est apériodique en raisonnant sur le nombre de 1. Sans leur en avoir parlé cela leur donne une idée du type raisonnement à adopter : le raisonnement par l'absurde.

Ainsi, je leur propose à partir de leur exemple trouvé d'essayer de trouver un pavage du plan.

Un premier exemple est essayé :

0100110001110000111111
1011001110001111000001
0100110001110000111111
1011001110001111000001
0100110001110000111111
C'est exemple ne marche pas puisqu'il possède un vecteur de périodicité vertical.

0100110001110000111111

10110011100011110000
01001100011100001111
01001100011100001111
10110011100011110000
10110011100011110000
01001100011100001111
01001100011100001111
01001100011100001111

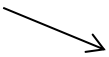
Ce vecteur na clairement pas de vecteur de périodicité horizontal ni vertical. Mais peut-il en avoir un autre ?

Le groupe comprend que non car on obtient des carrés formés seulement de 0 (resp. de 1) arbitrairement grand.

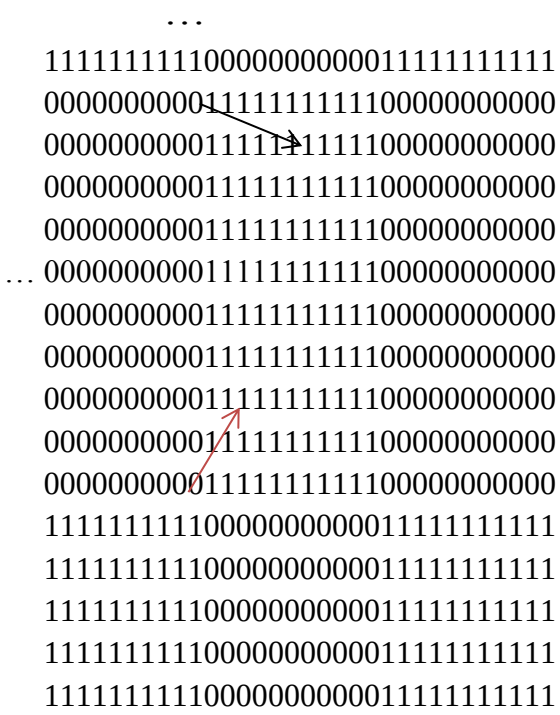
Donc par l'absurde si un tel vecteur existait, on pourrait trouver un endroit où les carrés soit assez grand pour que l'un des 4 coins du carrés constitué de 0 soit forcément envoyé sur un 1.

Le calcul explicite de ce 0 pourrait être trouvé mais le calcul est trop laborieux et trop peu pertinent pour être effectué.

Explication graphique :

Supposons  ou un vecteur de périodicité.

A partir d'un certain moment la suite créée sera de la forme



Aucun de ces 2 vecteurs ne peut être de périodicité.

Enfin une partie du travail effectué s'est portée sur la réalisation du pavage en chaise décrit ci-dessous dans le résumé de Sébastien.

(Deux de nos groupes on eut le même thème à aborder et ont donc effectué un travail similaire chacun de leur côté).

b) Compte rendu de Sébastien

i) Groupe sur les pavages apériodiques

Ce groupe est constitué de 3 élèves a la particularité d'être le dernier a choisir le sujet, et laisse paraitre un certain manque de motivation par rapport au thème.

L'entrée en matière est assez délicate: l'esprit du stage du type « recherche encadrée » est assez inhabituel pour elles et elles semblent désorientées. Elles répètent souvent ne pas comprendre « le but de l'exercice » et ont beaucoup de mal à assimiler l'idée qu'il n'y a pas qu'une seule solution aux problèmes qu'elles se posent en fonction de « règles » qui définissent le cadre du problème qu'elles se posent.

Par exemple elles me demandent régulièrement si « on a le droit de faire tourner les tuiles pour paver ?». Mes réponses sont en général que c'est à elles de fixer les règles, dans le but d'essayer de leur faire prendre conscience de l'intérêt en mathématiques de rigoureusement définir les objets et le vocabulaire qu'on va utiliser.

Apres de longues explications sur le sens du stage hippocampe, le groupe commence a assimiler ce que nous attendons de lui. Je demande aux élèves de m'expliquer ce qu'est la périodicité selon elles. Je ne leur donne aucune piste et les invite a définir cette notion dans le sens de leurs intuitions.

Ayant du mal à répondre à ma question, je leur suggère de dessiner des pavages qui leurs semble ou non périodiques.

Elles me proposent 2 types de pavages apériodiques (pour une ligne) : l'un grâce à un noble infini de briques, et l'un grâce à un nombre fini de briques (du type de celui décrit par Arthur précédemment).

Je leur propose alors d'essayer de généraliser ces notions dans le plan.

Grace a une construction du types précédent. Les élèves arrivent a construire un pavage du plan apériodique.

Pour les guider vers de nouvelles idées, je décide de leur demander si elles peuvent extraire de leur pavage une partie qui permettrait de créer un pavage périodique.

Elles y arrivent dans des cas concrets:

Par exemple de:

01 12 23 32 20 01 12 23 32 23 32 20 01 12 23 32 23 32 23 32 20

Elles arrivent à extraire:

01 12 23 32 20

qui en se répétant pave périodiquement une ligne.

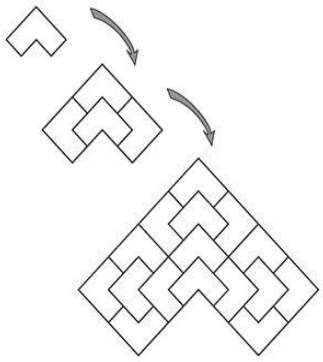
Mais en les guidant un peu j'arrive à leur faire concevoir un théorème plus général qui est :

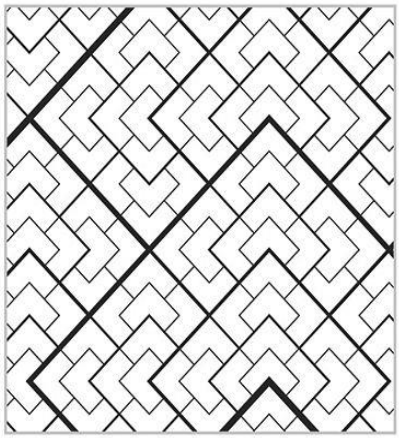
« Lorsqu'on a un nombre fini de tuiles, de tout pavage d'une ligne, on peut en extraire un partie qui permet de paver périodiquement une ligne »

Et la preuve de ce théorème semble maitrisée par l'une des trois. Je les invite a partager cette preuve entre elles pour que chacune puisse, à son tour, me l'expliquer.

La généralisation de ce théorème au plan est par contre plus compliquée, mais Pierre leur indique qu'il faut utiliser le « lemme des tiroirs » ce qu'elles auront du mal a assimiler.

Je décide donc de les orienter finalement dans un autre pavage apériodique du plan grâce à des L et des P qui peuvent s'assembler en une sorte de spirale.





Elles arrivent finalement (avec l'aide d'un autre groupe qui a aussi ces formes sous la main) a construire un tel pavage, et même a me convaincre que leur pavage est apériodique.

ii) Groupe sur les pavages du plan

Ce groupe est quant à lui composé de quatre élèves. Elles semblent très motivées pour ce projet. Ce groupe semble, à première vue, composé d'élèves de bon niveau.

Les élèves commencent par s'interroger sur les règles a définir pour pouvoir paver. (Nombre de tuiles, plan fini ou infini, retournement des tuiles…)

La première piste qui leur est proposée est de paver une forme de « V » en imposant la première ligne et les tuiles utilisables.

Elles arrivent à trouver une solution au problème proposé dans la matinée même.

La problématique suivante (qu'elles ont trouvée toutes seules) est de paver un « ciel étoilé » en imposant uniquement les tuiles.

Les solutions proposées sont légèrement différentes si on doit paver de cette manière un plan fini (2 tuiles suffisent) ou un plan infini (il faut alors rajouter les tuiles des bords).

Leur idées suivantes sont de créer des drapeaux: celui des Etats-Unis et celui de la Grande Bretagne

Leur fil conducteur est d'avoir une construction aboutie (en l'occurrence celle de drapeaux nationaux). Bien que mathématiquement limité ou moins intéressant que d'autres problèmes théoriques, je décide de les encourager dans ce sens, car leur motivation a considérablement grandie depuis cette idée.

J’essaie donc de rapprocher les drapeaux qu’elles ont choisis de certaines problématiques de pavages d’un rectangle. (Placement d’une pièce à un endroit précis, séparation de la forme, localisation du milieu…)

Pour le drapeau de la Grande Bretagne:

-La construction du « V » a déjà été traitée. Elles décident donc de faire partir un V de chaque bord. La solution permet de créer le drapeau souhaité mais il y a quelques problèmes d’échelle, qu’elles peuvent régler en proposant des tuiles rectangulaires au lieu des tuiles carrées.

Pour celui des Etats-Unis:

-la partie « ciel étoilé » a déjà été traité

-la partie « bandes horizontales » ne pose pas trop de problèmes (2 types de tuiles suffisent).

-par contre, la partie séparation du rectangle est plus délicate. Je les guide en leur proposant d’essayer de placer une pièce particulière à un endroit choisi.

Elles arrivent finalement à proposer une solution correcte, mais elles

ont eu besoin d’être guidé pour ce problème difficile. Apres cela, la fin de la création du drapeau n’est pas détaillée, le nombre de pièces nécessaire devient conséquent. Je leur propose, pour leur exposé, d’insister sur les points particuliers de leur construction, et d’illustrer grâce au drapeau les motivations de leurs problématiques.

La partie mise en page de l’exposé a été plus difficile pour ce groupe. En effet, le groupe s’est séparé en deux groupes de deux, chacun voulant une présentation du poster différente (l’une plus chronologique, l’autre plus synthétique). Aucun des 2 groupes n’a lâché, et leur décision était de faire des Panneaux différents.

Après une longue discussion avec tout le groupe, leur expliquant qu’il n’était pas cohérent de faire deux panneaux différents pour le même travail, chacun des partis a laissé un peu de terrain, et le groupe a finalement réussi à ne faire qu’un seul panneau.

III Conclusion

Finalement, à l'heure prévue à cela, tous les groupes avaient terminés leurs panneaux. Les élèves se sont motivés à nettoyer les salles et accrocher les panneaux pour recevoir les chercheurs à qui ils les ont montrés. Ils étaient souvent très fiers de leur recherche et très flattés à ce que des chercheurs soient intéressés par leurs panneaux.

Après cela, un dernier gouter a été organisé, et les élèves nous ont donnés leur ressenti qui était toujours bon.

Bien que la relation que nous avions avec les élèves était loin de celle qu'ils ont avec leur enseignant, cela nous a vraiment offert une excellente expérience de relation avec les élèves, qui nous sera évidemment très profitable dans notre futur métier d'enseignant.

De leur côté, les élèves ont eux aussi apprécié (de leurs aveux mêmes) cette expérience. De plus nous avons l'impression que certains élèves, qui ne sont pourtant pas les plus brillants pendant l'année, ont réussi à s'intéresser aux mathématiques grâce au point de vue original (pour un élève) des stages Hippocampe sur la matière.

Nous remercions toute l'équipe qui a entouré les élèves pour ce stage ainsi que toute l'équipe qui permet que les stages se déroulent de cette manière et dans ces conditions.