



# Stage Hippocampe DEFORMING SURFACES

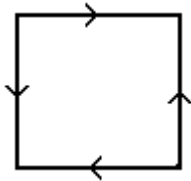
Chercheur : Marc-Hubert NICOLE  
Tuteurs : Serge TROUBETZKOY, Ziad CHARIF, Clément SPAIER  
Classes de l'École Internationale PACA à Manosque  
20-21-22 février 2012

## 1. Les différentes surfaces et leurs caractéristiques

Tout d'abord, il est important de savoir que la topologie, l'étude des surfaces, ne fonctionne absolument pas comme l'arithmétique. Nous avons étudié 5 types de surfaces :

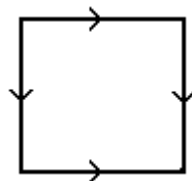
- **La sphère**, qui correspond à l'élément neutre (le 0 en arithmétique), son EP (Euler Poincaré) est de 2. C'est un objet en 3 dimensions et une surface orientable.

Représentation topologique :



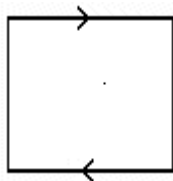
- **Le tore**, qui contient un trou, et un EP est de 0. C'est aussi un objet en trois dimensions, que l'on peut comparer à un donut et qui est une surface orientable.

Représentation topologique :



- **Le ruban Möbius**, qui est une surface non orientable et a un EP de 0. On peut l'obtenir en croisant une bande de papier.

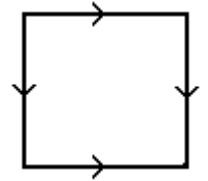
Représentation topologique :



- **La bouteille de Klein**, qui contient deux trous et un EP de 0. C'est un objet en quatre dimensions, un humain ne peut donc pas se

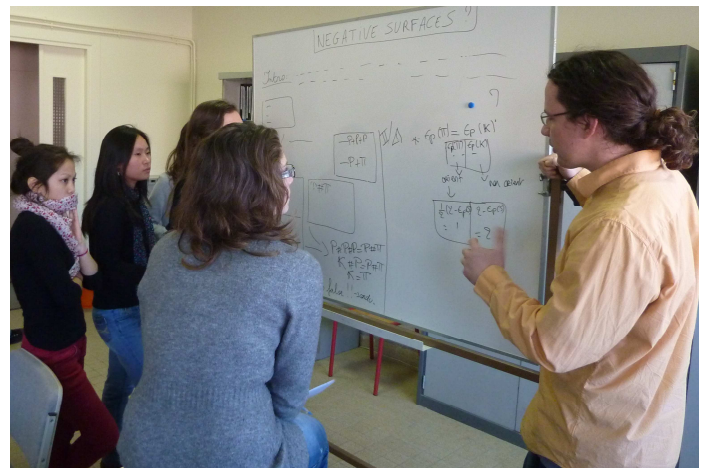
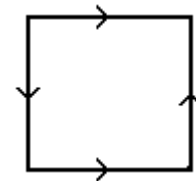
l'imaginer. Ce n'est pas une surface orientable.

Représentation topologique :



- **Le plan projectif**, qui est une surface non orientable et dont l'EP est de

Représentation topologique :



## 2. Notre problématique

**Puisque qu'il existe un élément neutre (la sphère), pouvons nous assumer l'existence d'une surface négative ?**

**Théorème :** Deux surfaces compactes sont égales en topologie si et seulement si leur EP sont similaires et si elles sont toutes deux orientables ou non-orientables.

- Nous avons premièrement étudié la somme de deux plans projectifs, qui s'est révélée être équivalente à une bouteille de Klein.

Ensuite, nous avons étudié la somme de trois plans projectifs, c'est-à-dire la somme d'une bouteille de Klein et d'un plan projectif. En utilisant la **triangulation**, un système qui consiste à diviser une surface en triangles égaux dont un des sommets rejoint le centre de la surface, nous avons pu déduire le nombre de sommets, d'arrêtes et de triangles de la surface obtenue. Puis, nous avons calculé son **Euler Poincaré (EP)** qui est caractéristique de chaque surface et qui est donné par la formule :  $\text{Sommets} + \text{Nombre de triangles} - \text{Arrêtes}$ . Il est égal à -1.

• Nous avons fait de même avec la surface obtenue par la somme d'un tore et d'un plan projectif. Son EP est aussi égal à -1.

**Une des conditions du théorème est remplie, nous avons donc assumé l'égalité suivante : un plan projectif + une bouteille de Klein = un plan projectif + un tore. Supposons que les surfaces négatives existent, alors : une bouteille de Klein + un plan projectif - un plan projectif = un tore + un plan projectif - un plan projectif. Cela signifierait qu'un tore est équivalent à une bouteille de Klein.**



• Après calcul, nous avons prouvé qu'un tore et une bouteille de Klein avait tous deux un EP égal à 0. Cependant, le tore est une surface orientable contrairement à la bouteille de Klein. Une formule permet de calculer le nombre de trous d'une surface selon son orientabilité. Or, nous nous sommes aperçues que le tore comporte un seul trou mais la bouteille de Klein en possède deux.

**Un tore n'est donc pas égal à une bouteille de Klein, notre hypothèse est fausse.**

**LES SURFACES NEGATIVES N'EXISTENT PAS.**

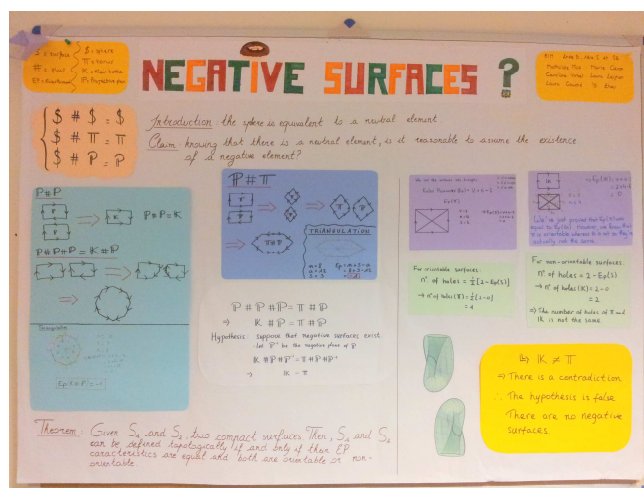
### 3. Déroulement de notre séjour

❖ **Premier jour :** Nous sommes arrivés vers 8 heures à l'université de Luminy où Mr Nicole, Serge TROUBETZKOV, Ziad CHARIF et Clément SPAIER nous attendaient. Mr Nicole nous a fait un briefing sur les surfaces puis nous nous sommes divisés en trois groupes de travail et chacun d'eux s'est vu attribué un tuteur. Jusqu'à l'heure du déjeuner, Ziad nous a apporté les connaissances essentielles à la compréhension de la topologie. L'après-midi, nous avons calculé la somme de certaines surfaces, puis nous sommes rentrés à l'auberge de jeunesse.

❖ **Deuxième jour :** Ziad nous a expliqué la notion de triangulation et d'Euler Poincaré durant la matinée, puis l'après-midi nous avons les avons appliquées aux surfaces qui nous intéressaient. Retour à l'auberge de jeunesse.

❖ **Troisième jour :** Création du poster sur notre problématique durant la matinée, puis l'après-midi, nous avons expliqué à des chercheurs ainsi que des étudiants notre étude sur les surfaces négatives et nos résultats. Retour sur Manosque après avoir chaleureusement remercié nos tuteurs pour ce merveilleux séjour.

*Caroline Virbel, Yi Zu, Mary Caron, Laura Gauché, Laura Leijnen et Mathilde Mus*



## 4. Opinions personnelles

**Mathilde Mus :** Ces trois jours peuvent se résumer en un seul mot, EXTRAORDINAIRE. J'ai toujours beaucoup apprécié les mathématiques mais c'est vrai que j'ai été déçu en entendant que notre sujet serait l'étude des surfaces. Or, ce n'était qu'un préjugé dont je me suis défaite dès la première matinée. Ce sont des aspects mathématiques que nous n'abordons pas au lycée, dont on nous parle peu pourtant j'ai trouvé la topologie fascinante. Malgré le stress de ne pas réussir à comprendre des notions de mathématiques avancées ou de ne pas finir le poster à temps, j'ai passé un excellent séjour et je remercie infiniment Mr Nicole et Ziad.

**Laura Gauché :** J'ai trouvé notre séjour à Luminy très intéressant car la topologie est un sujet que l'on ne traite pas en classe de seconde, et qu'il était donc vraiment agréable de découvrir une autre face des mathématiques. Même si au début j'étais plutôt paniquée à l'idée de travailler en anglais pendant trois jours, il s'est avéré que cela s'est très bien passé grâce aux bonnes explications que nous avons reçues. J'ai également trouvé qu'il y avait un vrai échange entre tuteurs, chercheurs, professeurs et élèves, ainsi qu'une bonne ambiance. Je remercie notre tuteur Ziad, et Mr Nicole et tenterais volontiers cette expérience à nouveau.

**Caroline Virbel :** Ce séjour à l'université de Luminy a été très intéressant. Une approche différente des mathématiques et de la géométrie ont fait de la topologie un sujet passionnant, étant donné que c'est un sujet absolument inconnu au lycée. Ce n'est pas tous les jours que l'on découvre qu'une tasse est un donut et que l'on peut jouer aux échecs sur une bouteille de Klein.

Les échanges en anglais ont rendu le séjour encore plus enrichissant. Il y avait une excellente ambiance, et des souvenirs inoubliables avec les autres élèves et professeurs, notamment à l'auberge de jeunesse. Je serais bien évidemment tentée de

recommencer cette expérience si on m'en donnait l'occasion.

**Yi Zhou:** J'ai vraiment apprécié ce stage Hippocampe. Cela m'a permis de découvrir la topologie pour la première fois : je la trouve extrêmement intéressante. J'ai adoré le débat et la manière dont nous avons discuté ensemble sur un problème, et le fait qu'il n'y ait pas que le résultat qui compte, mais surtout la démonstration. C'était une belle expérience !

**Laura Leijnen:** C'était une expérience très intéressante dont j'ai appris beaucoup de choses, le tout en étant guidé par un tuteur très sympathique et passionné par ce qu'il faisait, avec qui on découvrait les notions mathématiques ensemble. Ceci avait ses avantages, parce que cela nous obligeait à réfléchir ensemble, écouter les autres et mettre les idées en commun pour aboutir ainsi à notre projet final. Ce qui était très bien aussi, c'est qu'on était en contact avec des étudiants qui faisaient leur thèse, ainsi que des enseignants-chercheurs. Ceci m'a permis de poser des questions concernant leur parcours scolaire et les métiers dans le domaine des mathématiques. Pour finir, je voudrais remercier tout le monde grâce à qui ces 3 jours étaient possibles.

**Mary Caron:** Inoubliable. Nous avons très bien été accueillis, et il y avait une super ambiance. Même si j'ai eu du mal à comprendre la topologie au début, l'étude, par la suite, s'est déroulée à merveille. Merci encore à tous ceux qui ont rendu cette expérience possible. Ce fut un séjour enrichissant qui restera dans ma mémoire. (:

