IREM d'Aix-Marseille Laboratoire Pythéas
Stage Hippocampe

du 30 mai au 01 juin 2011

1ère S4 du lycée Pasquet d'Arles
Professeurs : Sylvie Larras et Carine Boutillier

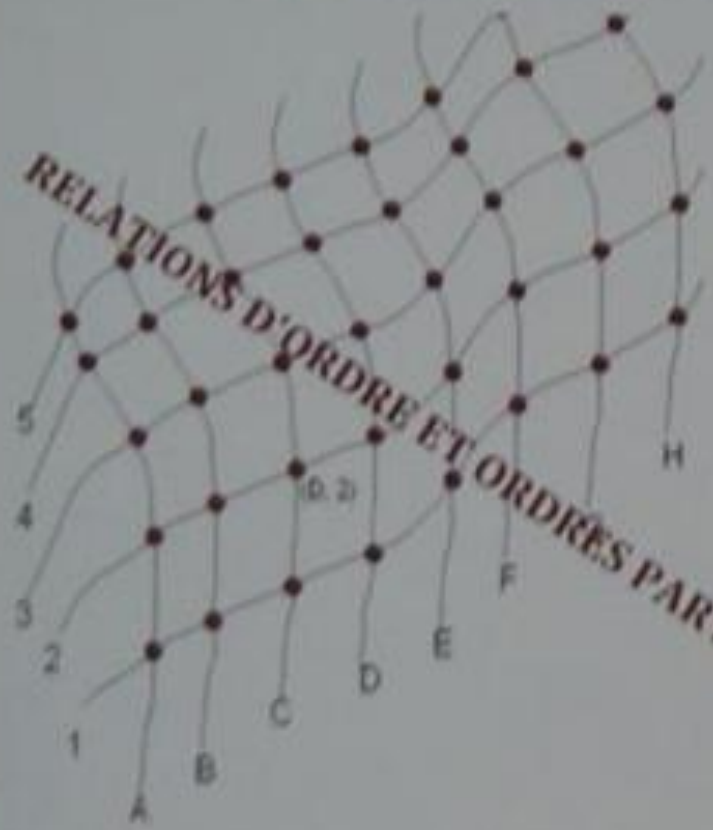
Thème : Relations d'ordre et ordres partiels

Stage proposé et encadré par : Christian Aperghis

avec Julien Lefevre, Safia Haloui, Amine Marzouki,
sans oublier Emmanuel Santiago

IREM D'AIX MARSEILLE – LABORATOIRE PYTHEAS

STAGE HIPPOCAMPE - MATHS



LUNDI 30 mai 2011
MARDI 31 mai 2011
MERCREDI 01 juin 2011

de 9h à 17h

ENCADRANTS : Christian APERGHIS
Julien LEFEVRE

TUTEURS
Safia HALOUI
Mohamed-Amine MARZOUKI

INVITES
Sylvie LARRAS
et les élèves de 1ère S du Lycée Pasquet
ARLES

Les 6 groupes d'élèves du lycée Pasquet

Groupe 1

Sylvain Bon
Clément Durand
Benjamin Olivan
Loïc Véran

Groupe 2

Ange Athanassiou
Clothilde Benvenuti
Lucas Coskun
Folco Pampaloni

Groupe 3

Titouan Calvet
Alexandre Faure
Balthazar Proust
Céline Simon

Groupe 4

Axelle Hautbout
Romain Hurdebourcq
Ouadie Lachkar
Simon Rodriguez

Groupe 5

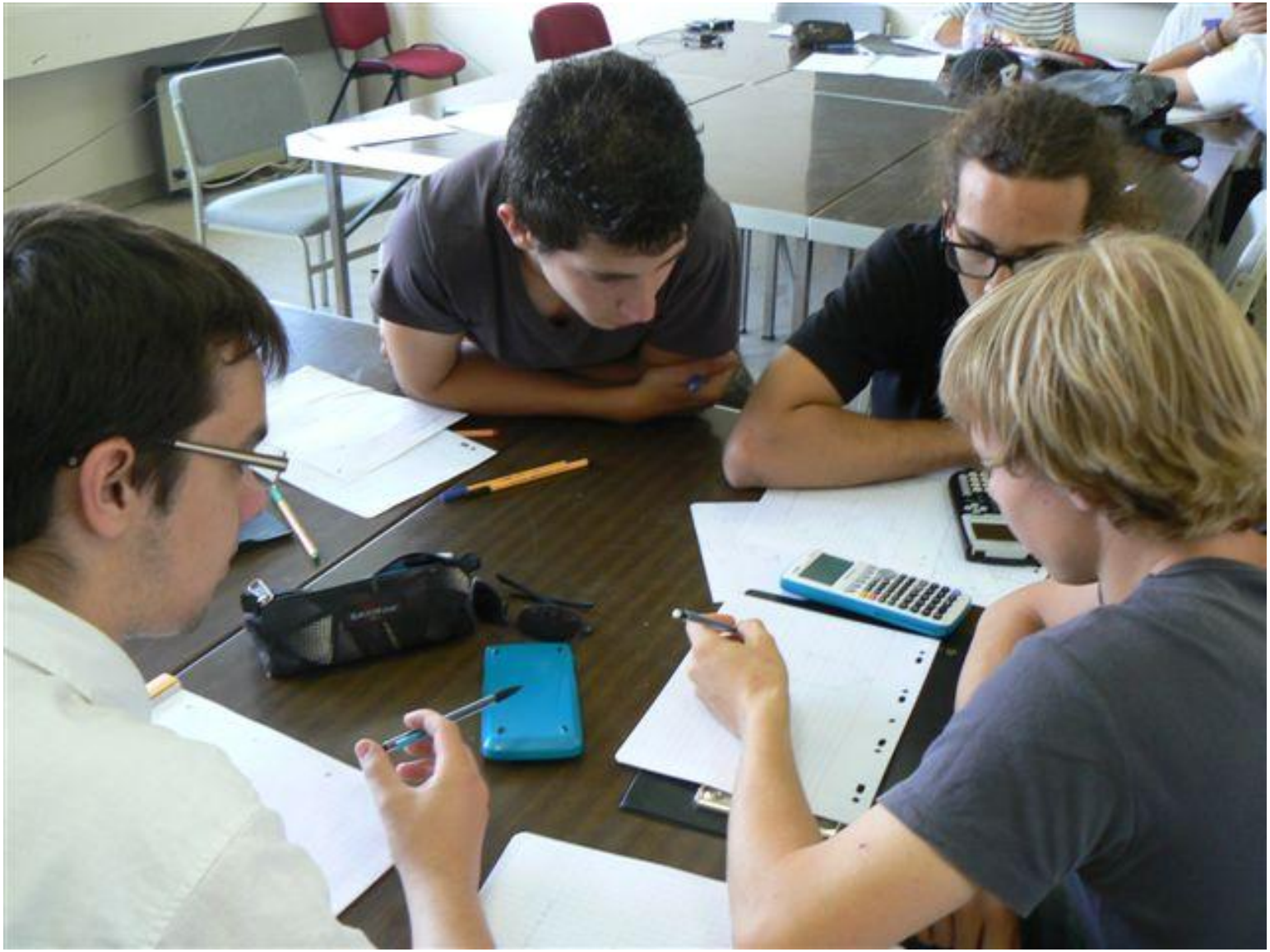
Victor Blohorn
Aymeric Filippini
Guillaume Landi
Jérémy Luong

Groupe 6

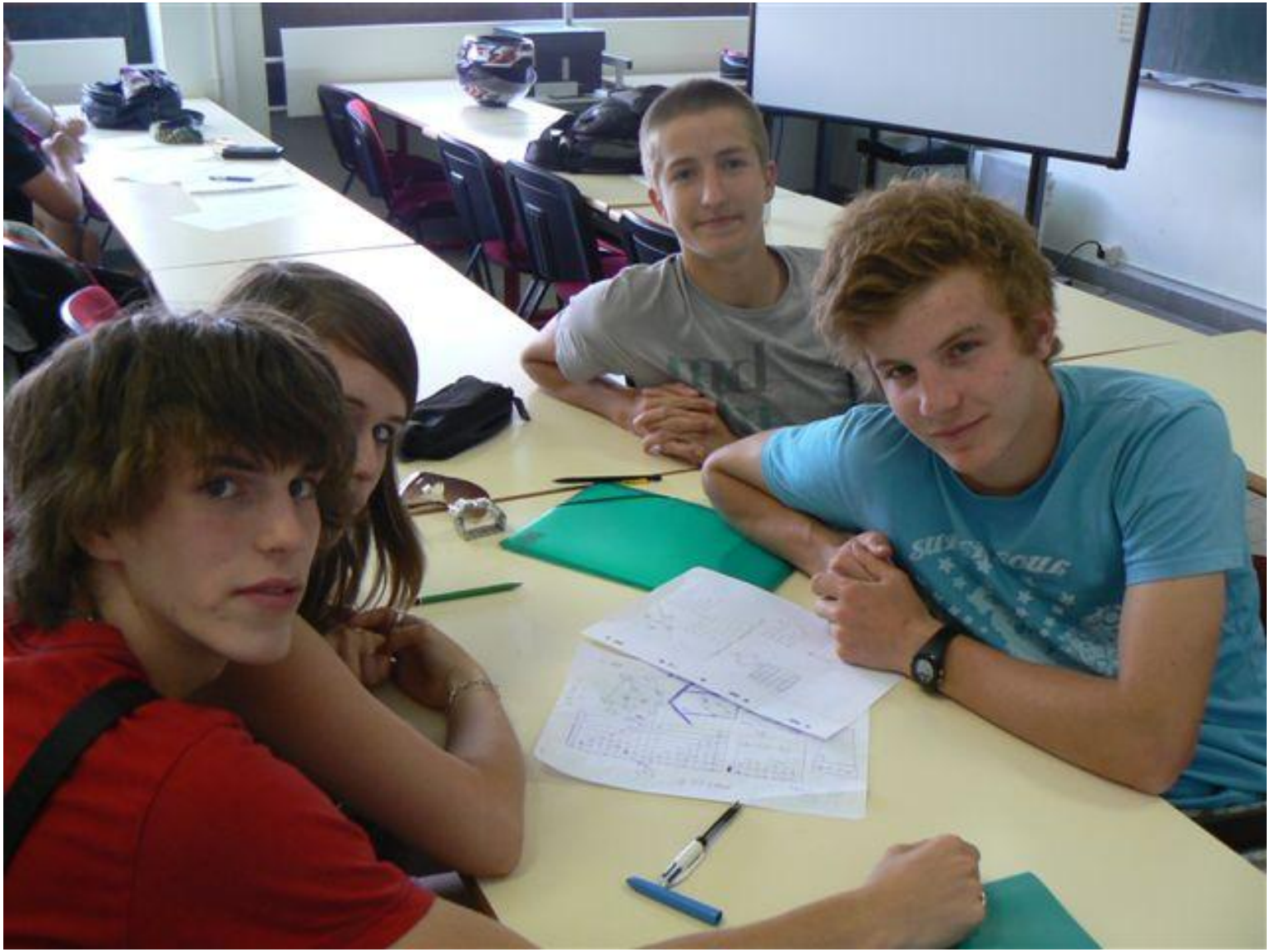
Justine Chaix
Thomas Creuillenet
Thomas Libérato
Guillaume Rodriguez

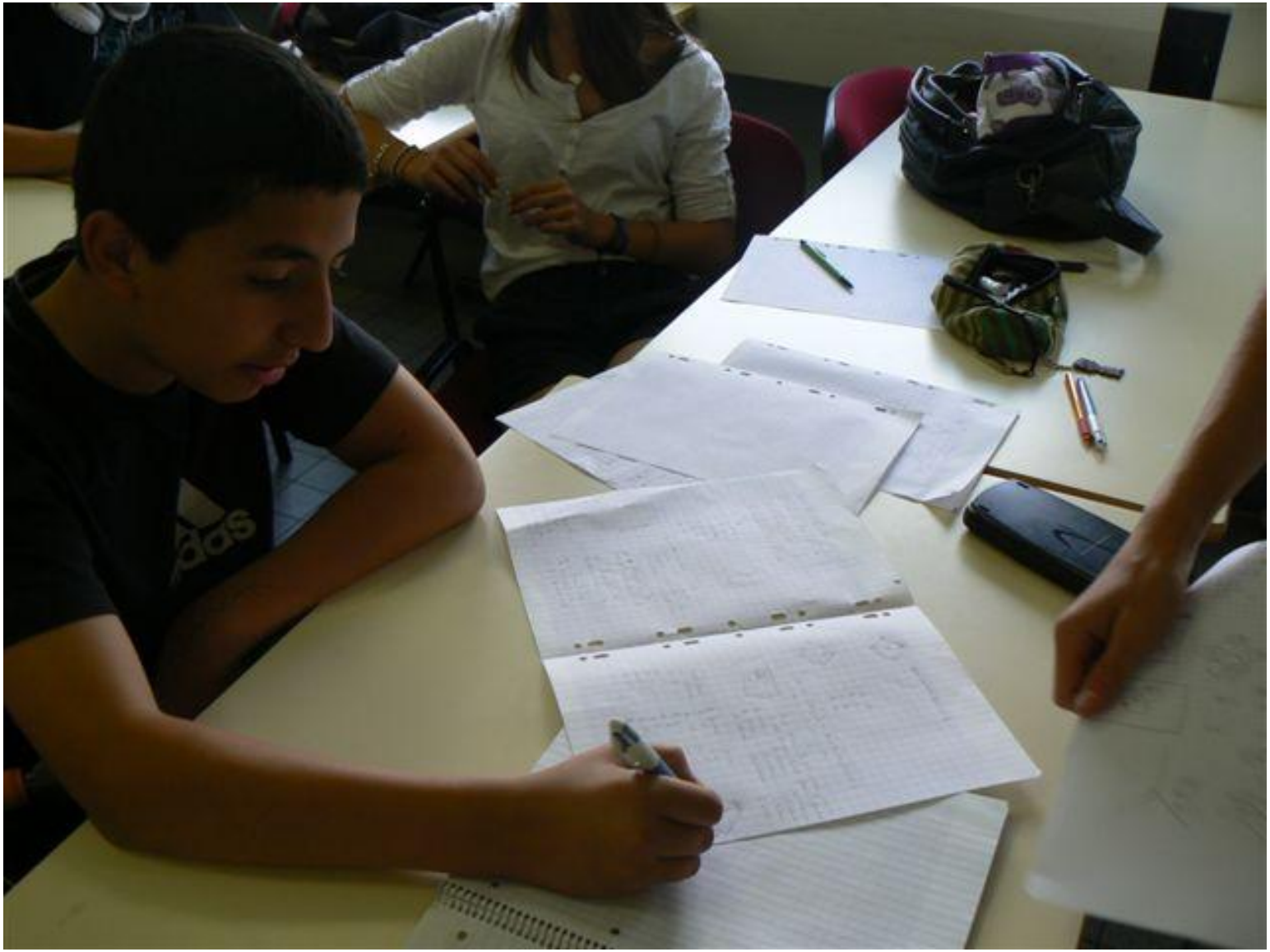
1ère Journée à l'université de Luminy
IREM d'Aix Marseille

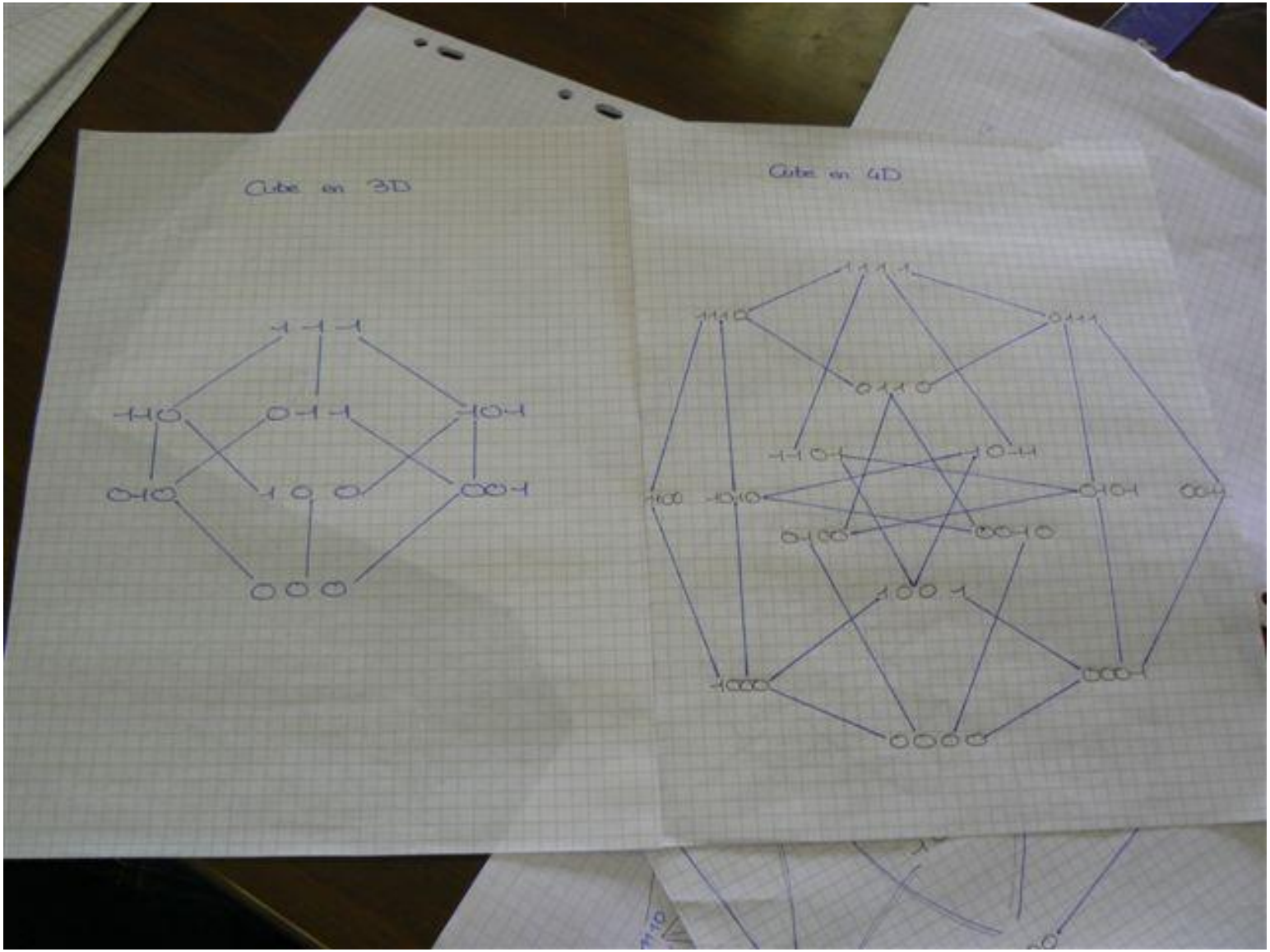
Présentation du thème du stage
et
On commence à chercher…

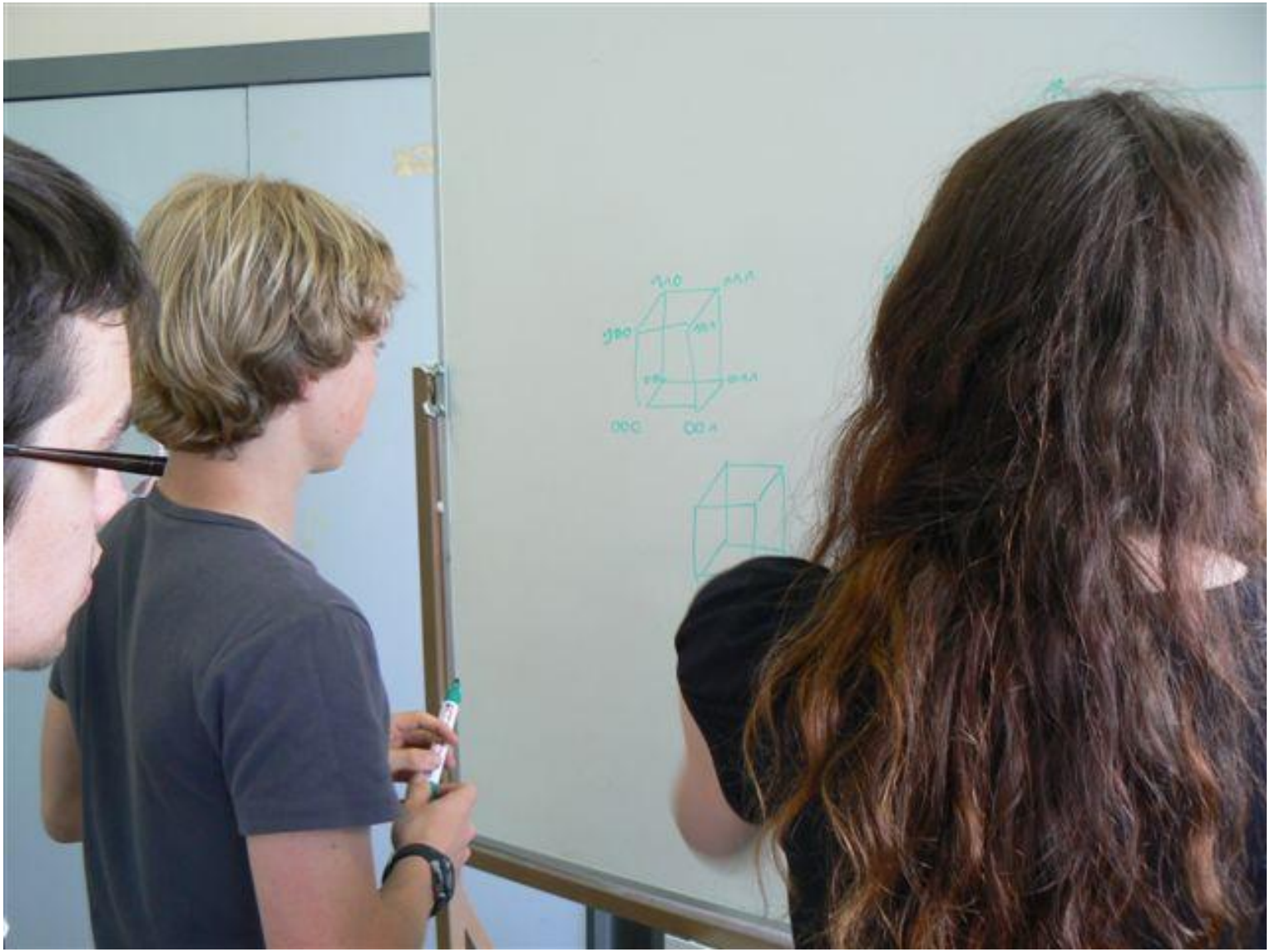


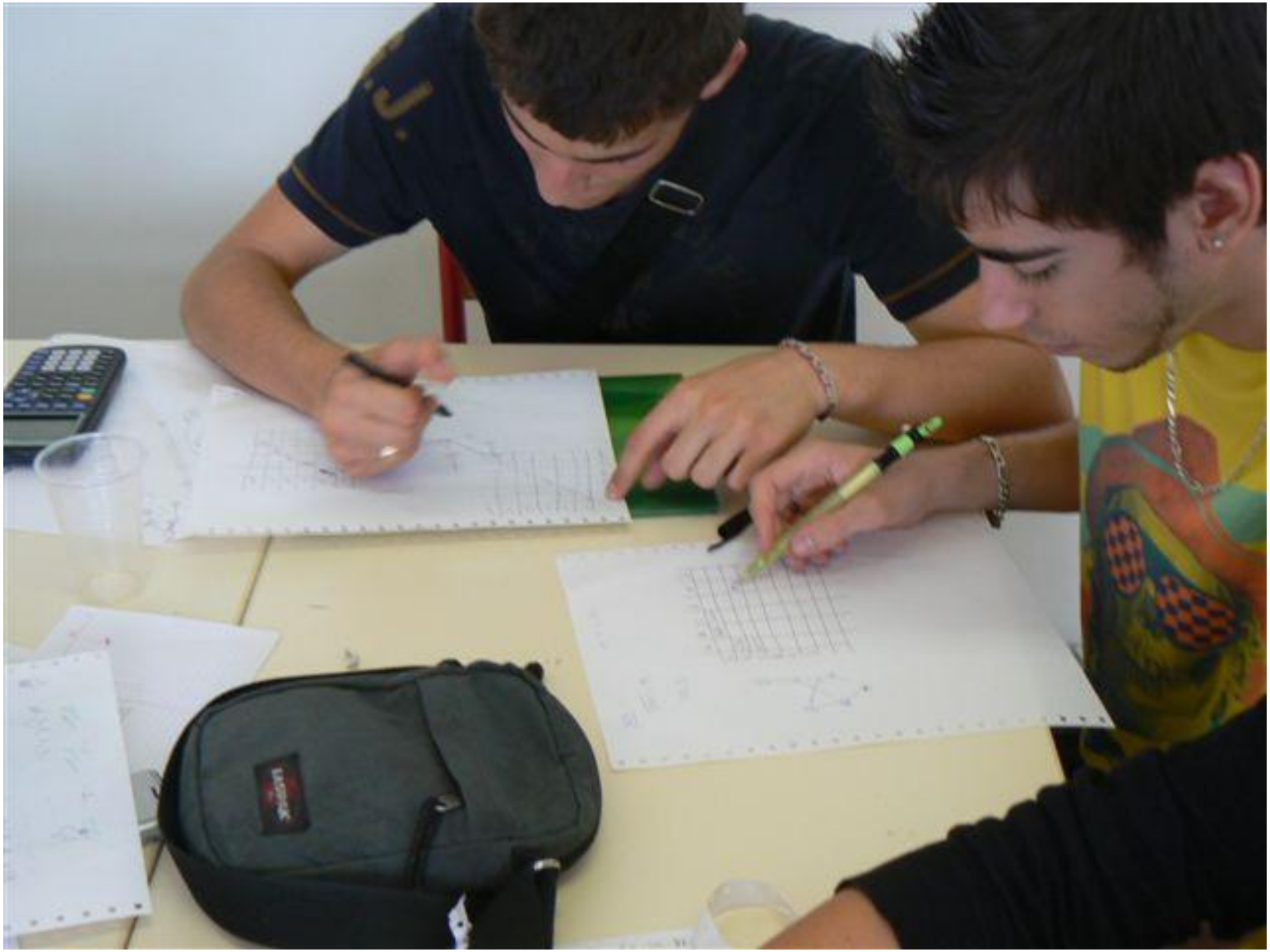
evian




adas


Cube en 3D
Cube en 4D





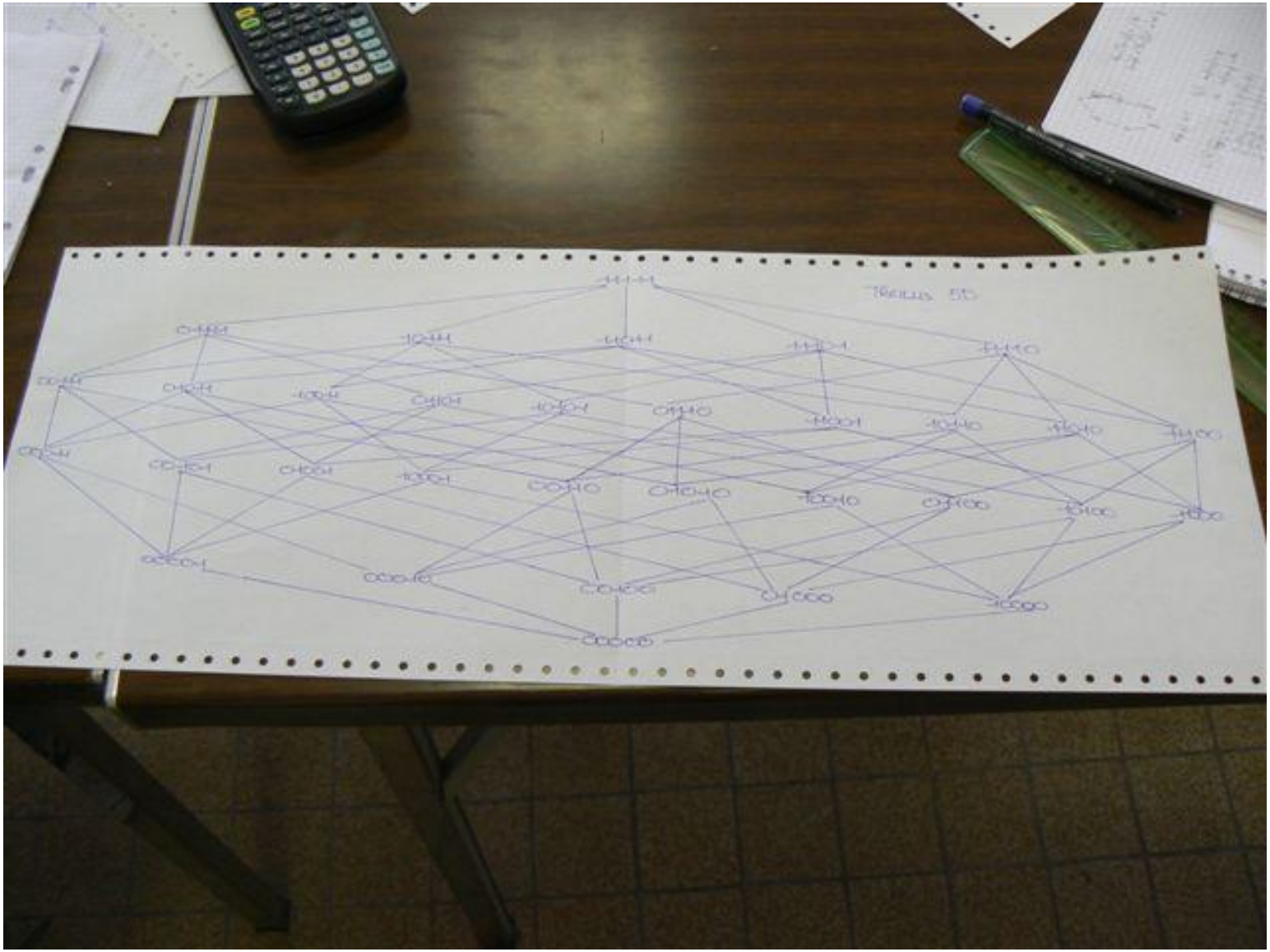
Après une 1ère journée de mathématiques, découverte des calanques

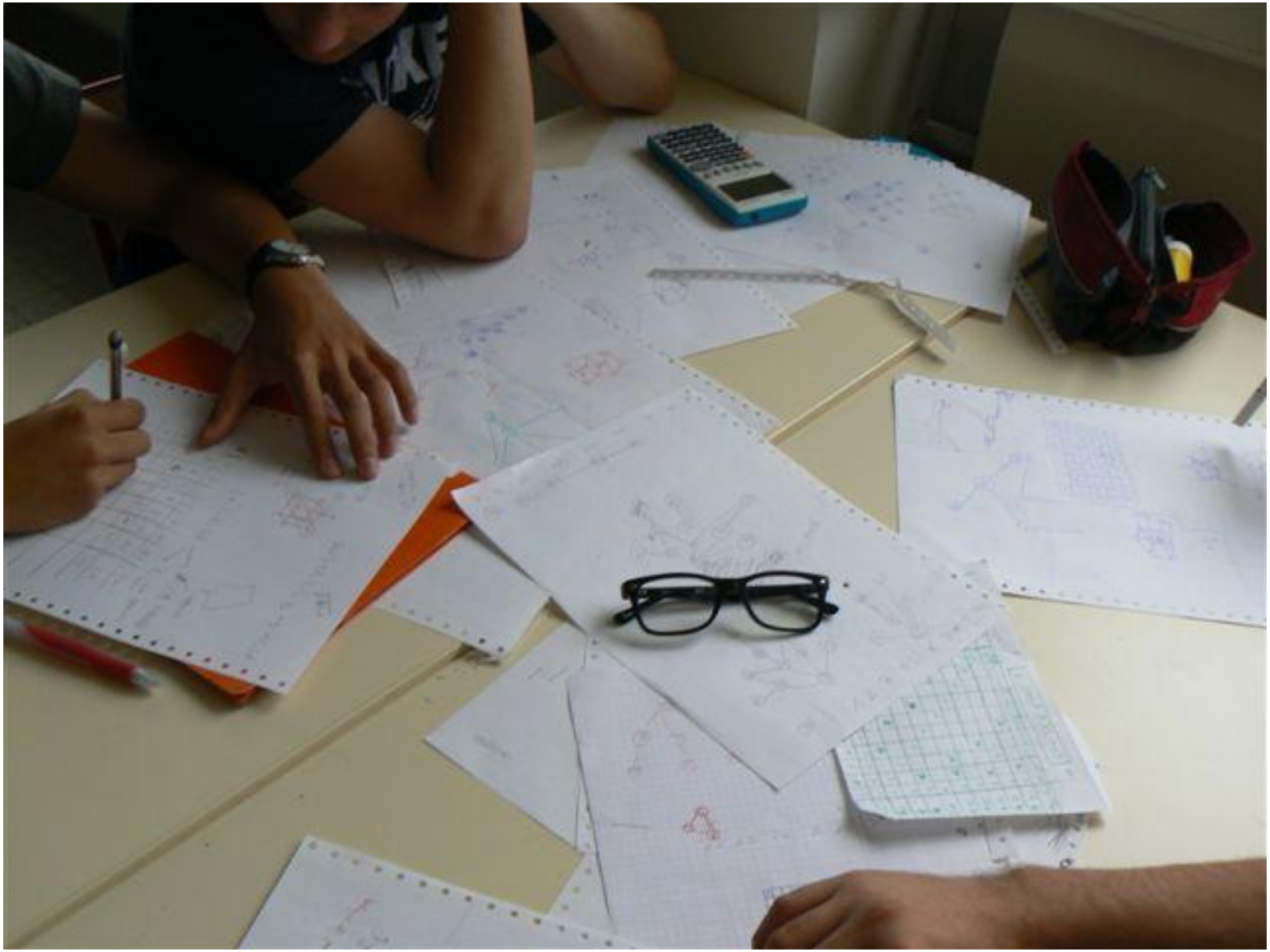
adidas

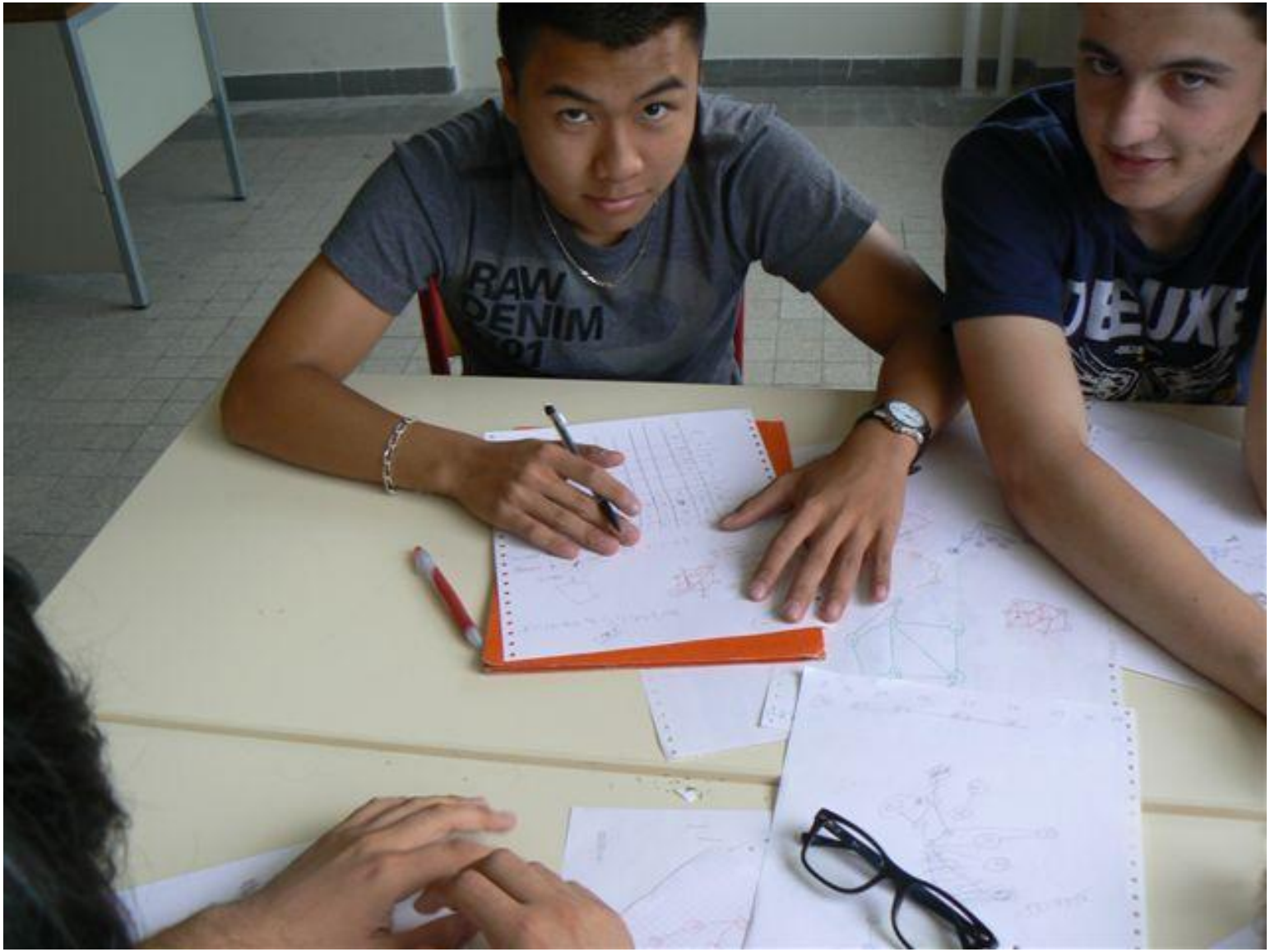
Marseille, si près de la mer.
On en profite !

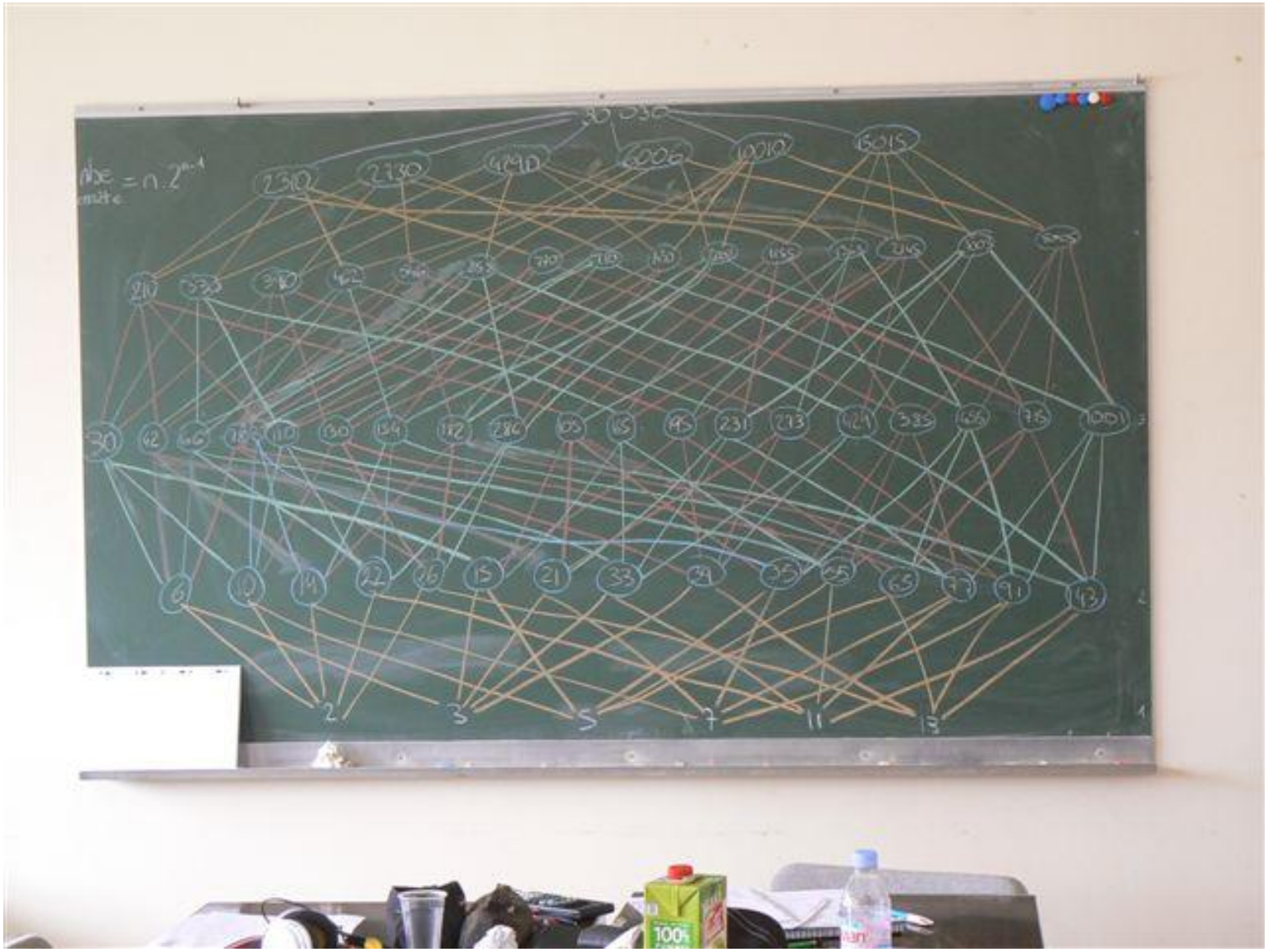
2ème Journée à l'université de Luminy
IREM d'Aix Marseille

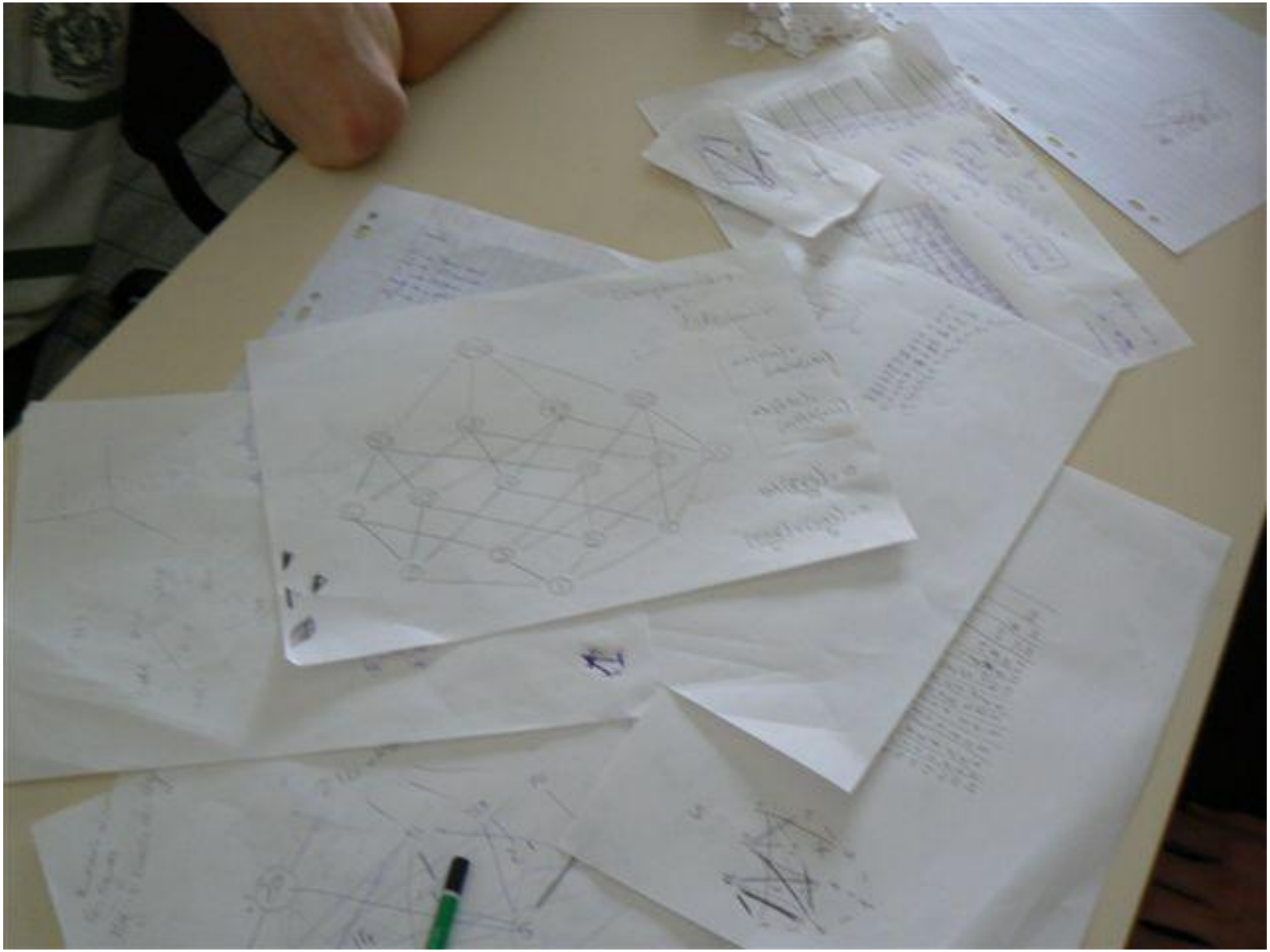
On cherche encore… et on finit par trouver !

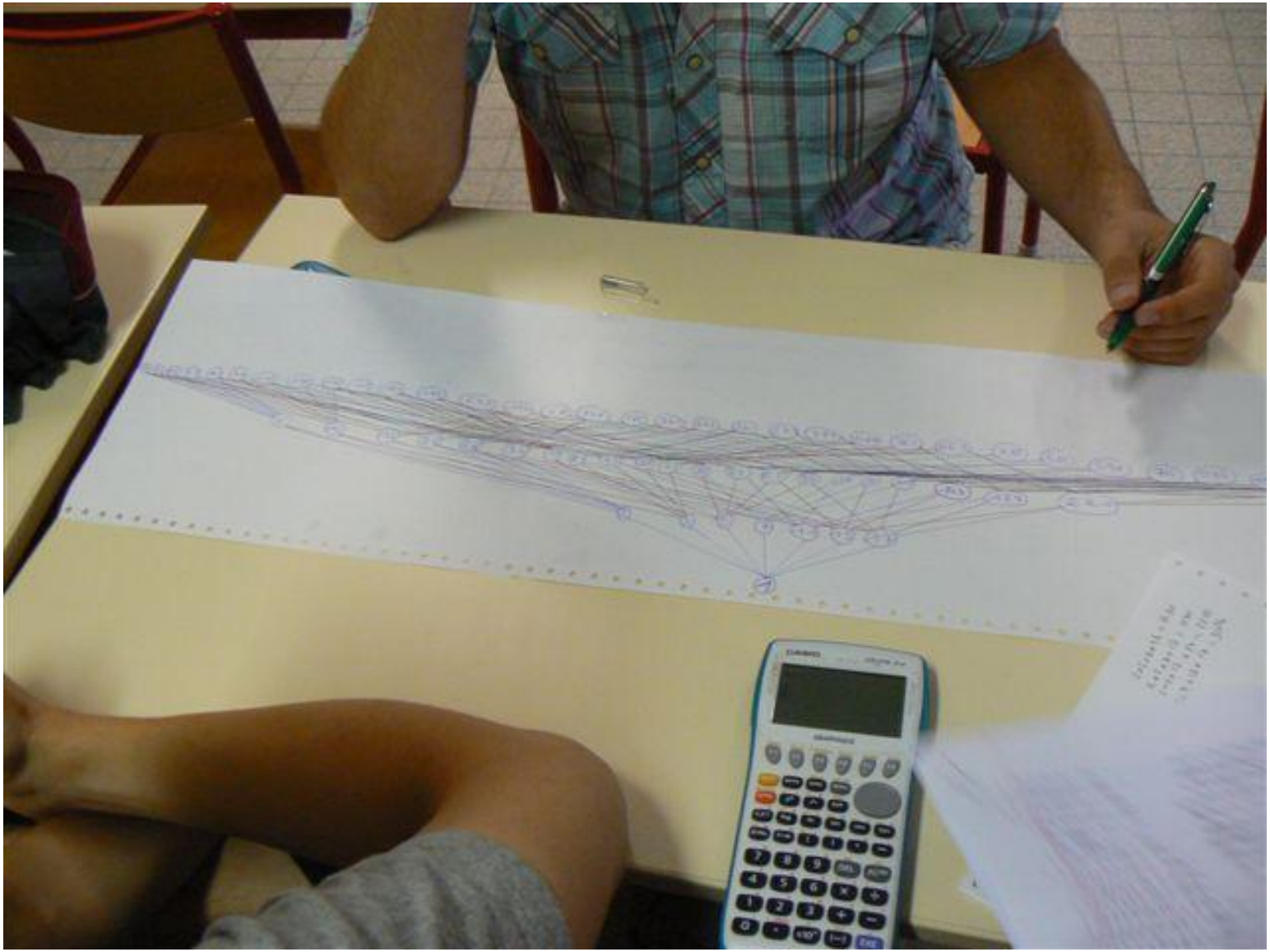





RAW
DENIM

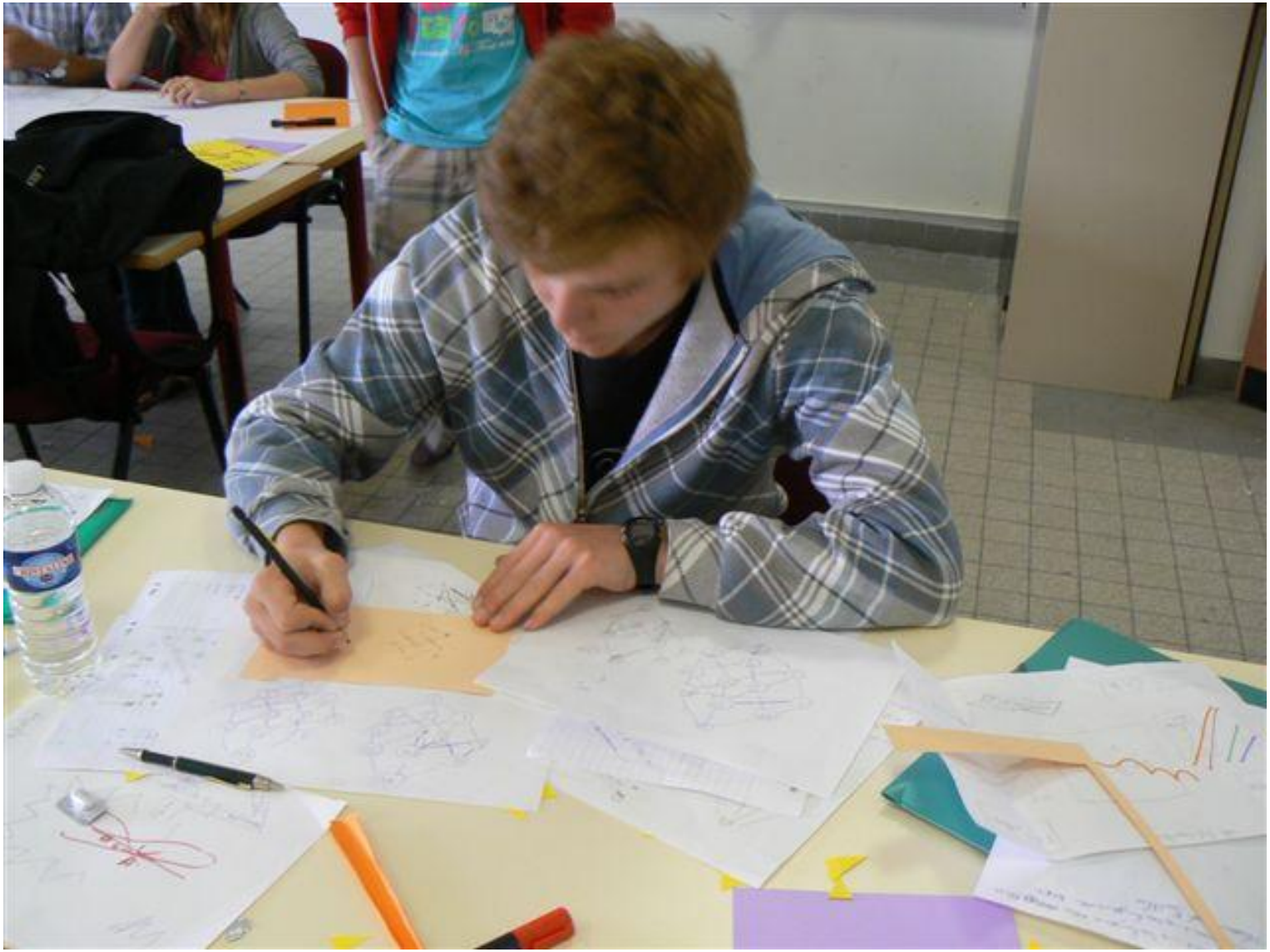

2
3
5
7
11
13



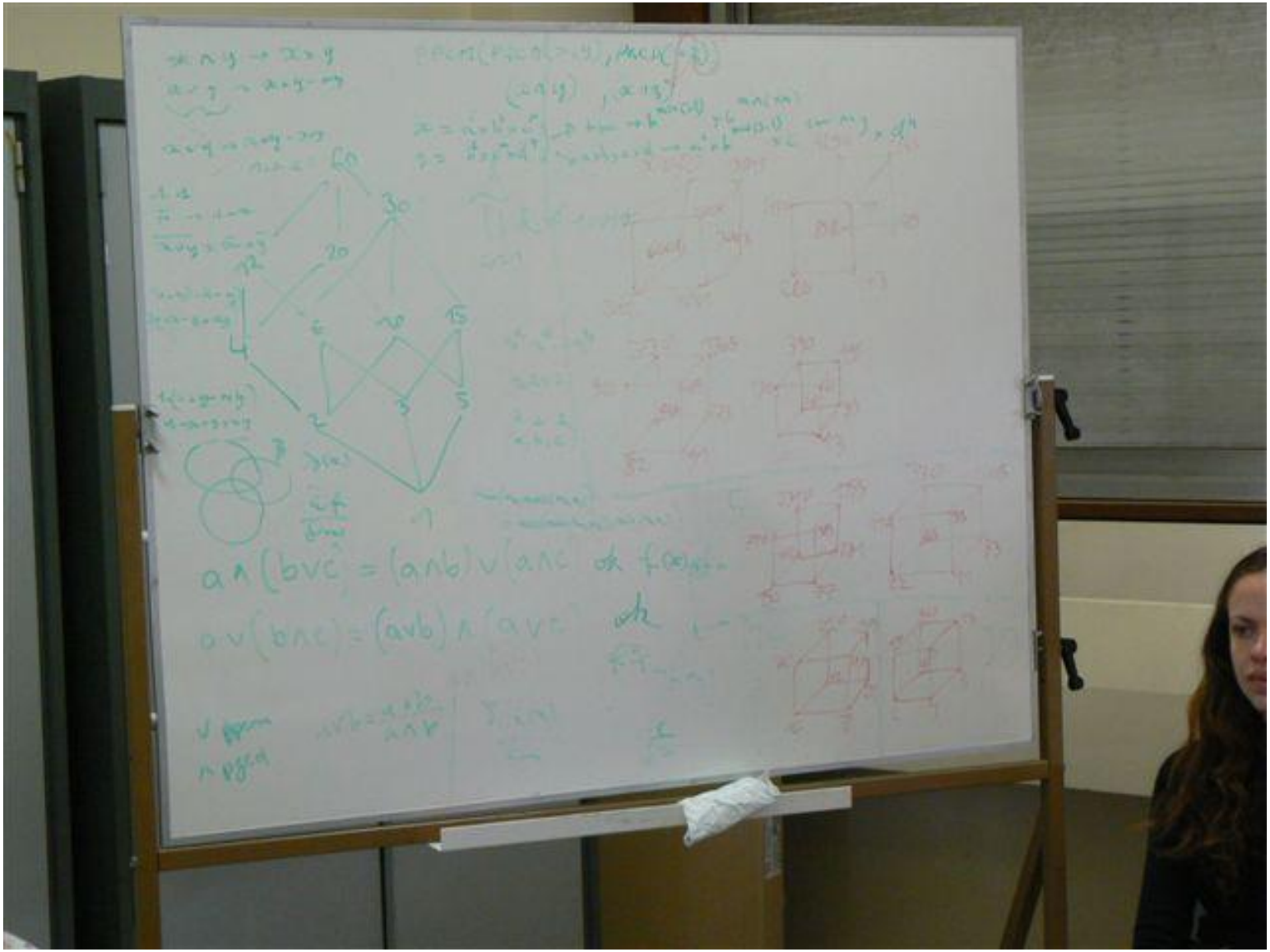


3ème Journée à l'université de Luminy
IREM d'Aix Marseille

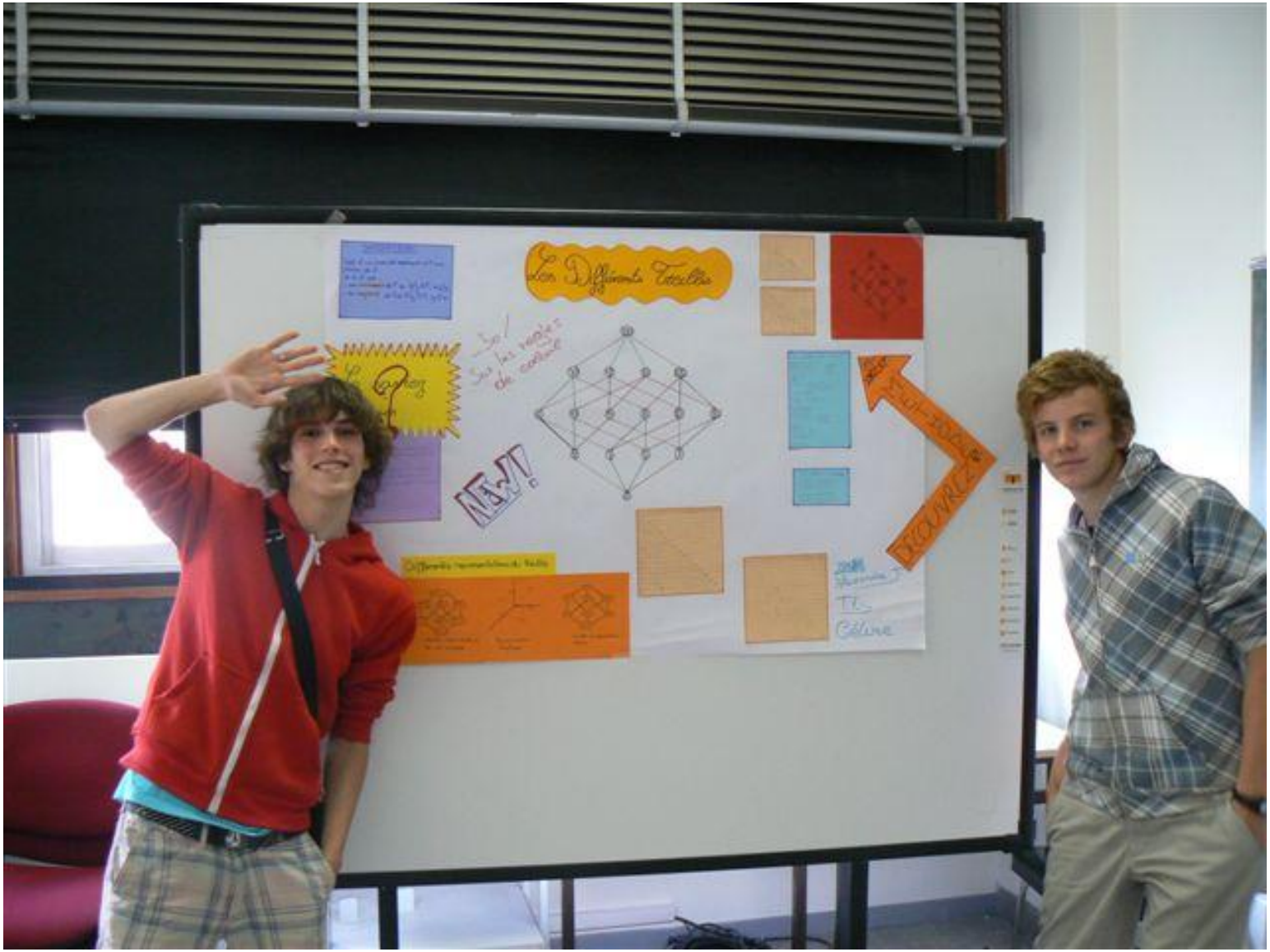
Réalisation des posters
Et
Présentation aux chercheurs invités



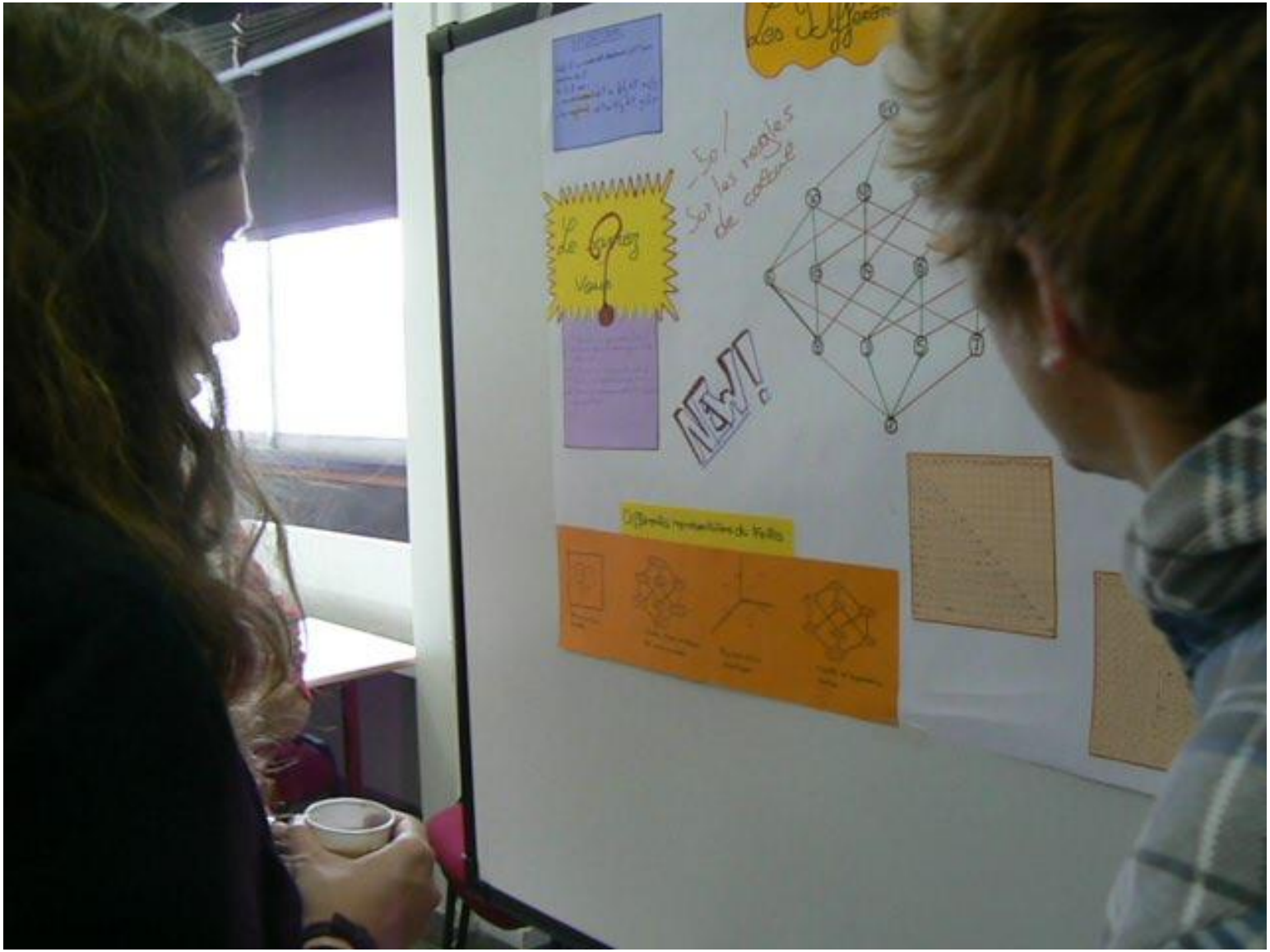
GUESS


a∧(b∨c) = (a∧b)∨(a∧c)
a∨(b∧c) = (a∨b)∧(a∨c)

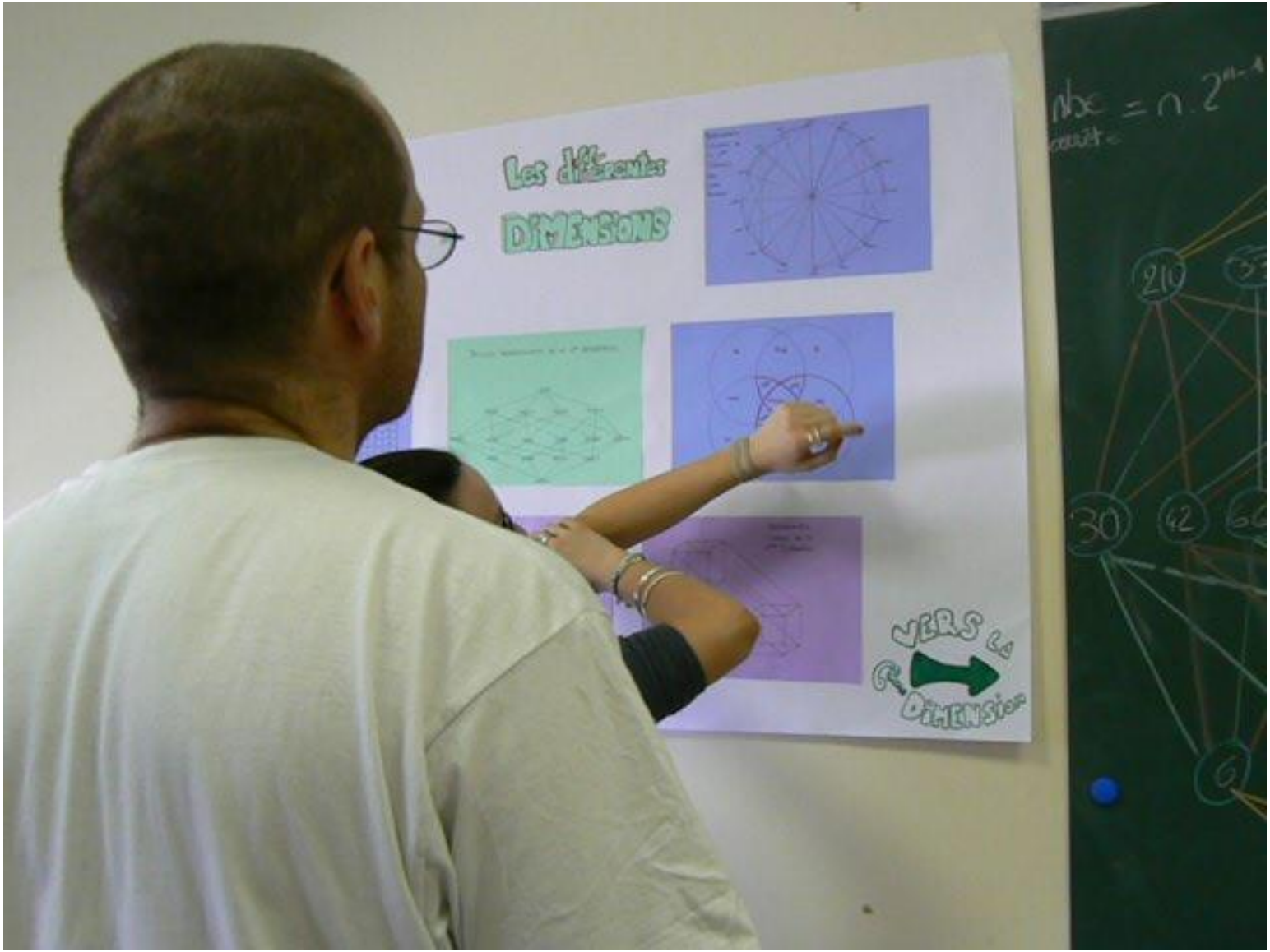
Les Treillis


Les Différents Treillis
NEW!
Céline

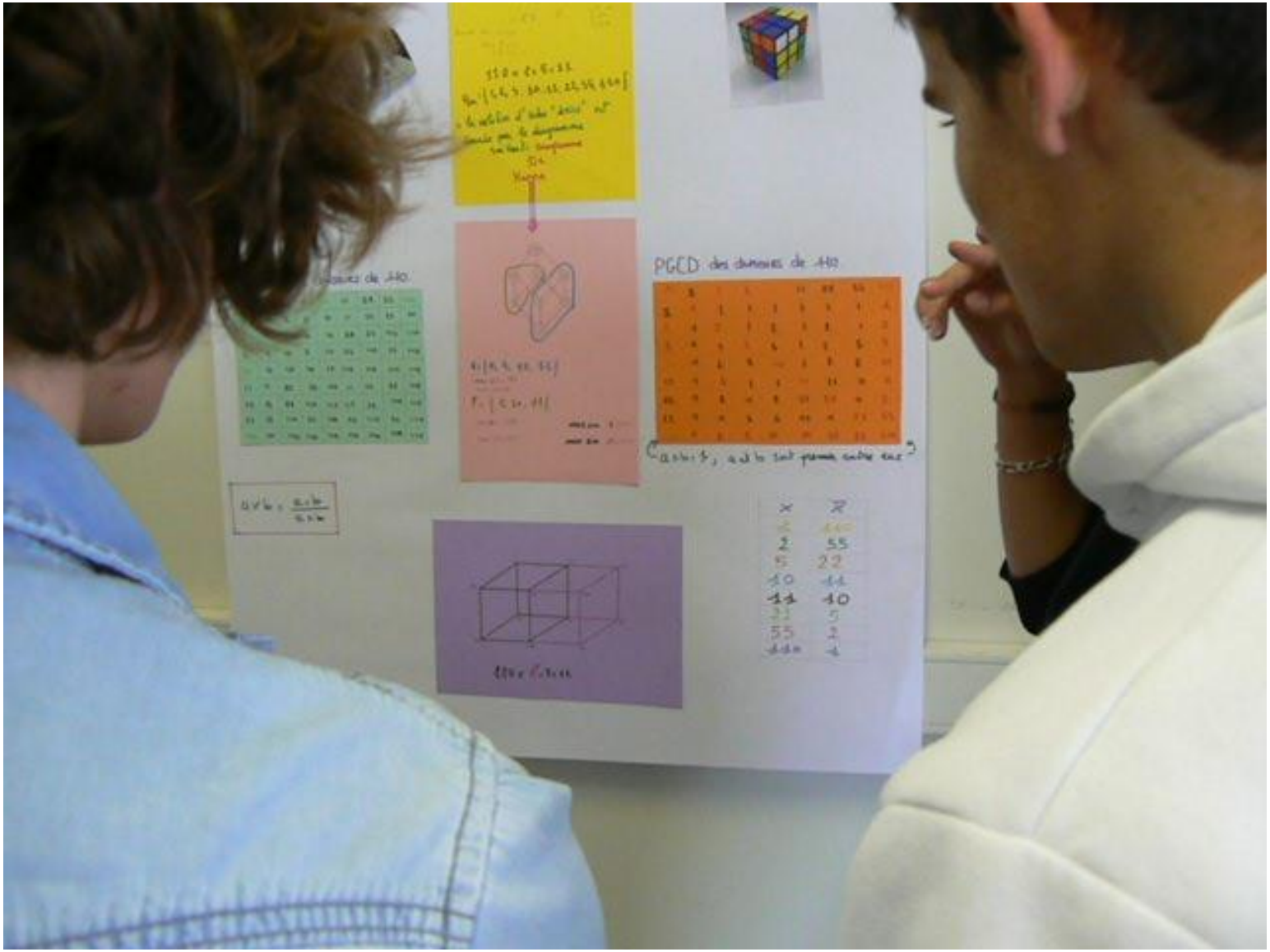
Les Treillis
Treillis booléens 4 dimension
Représentation


Les Jeffs
Le Gray
Non!

RELATION DE DIVISIBILITÉ
ET HYPERCUB


Les différentes
DIMENSIONS
VERS LA
DIMENSION

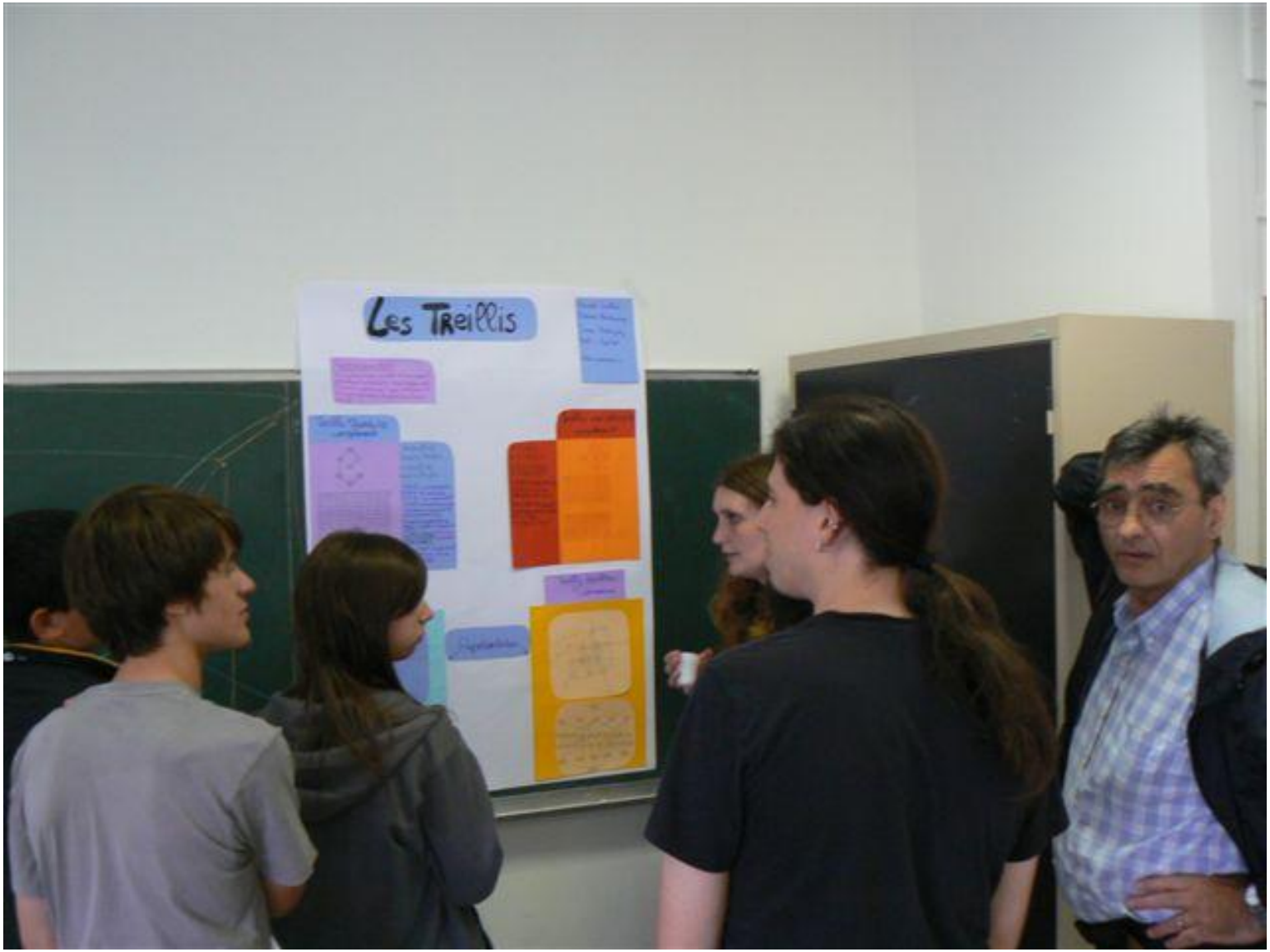
DIMENSION 4
ET GÉNÉRALISATION


PGCD des diviseurs de 440
x R
2 55
5 22
10 11
11 10
22 5
55 2
440 1

RELATION DE DIVISIBILITÉ
ET HY

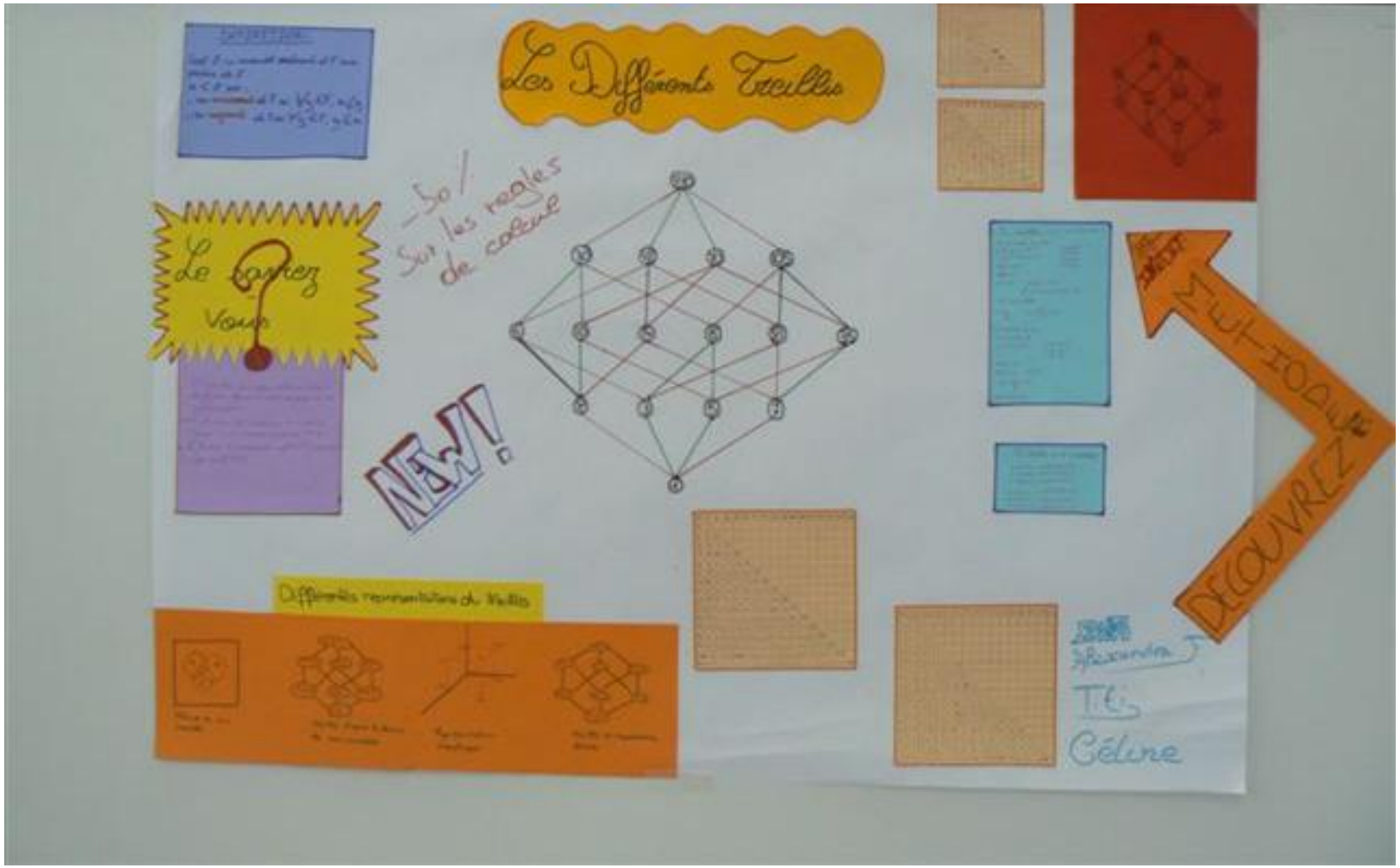
Les différentes
DIMENSIONS
3D
4D

Les différentes
DIMENSIONS
3D
4D

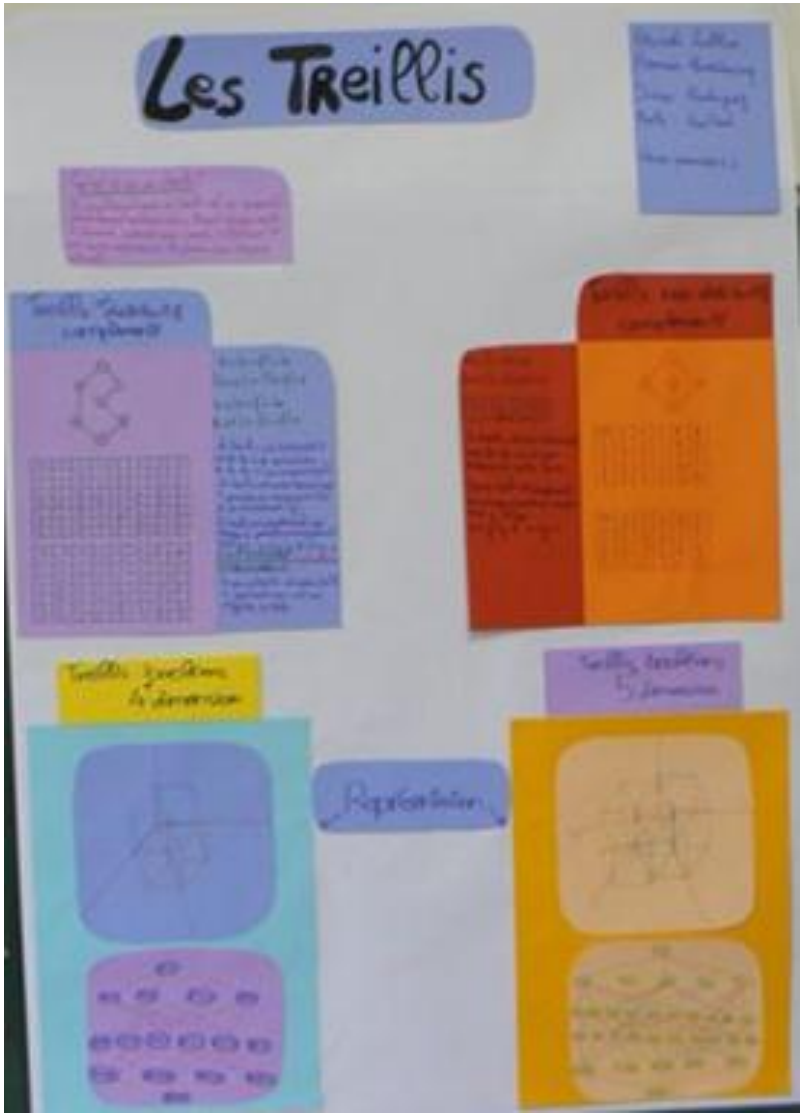

Les Treillis

Les posters réalisés par les élèves

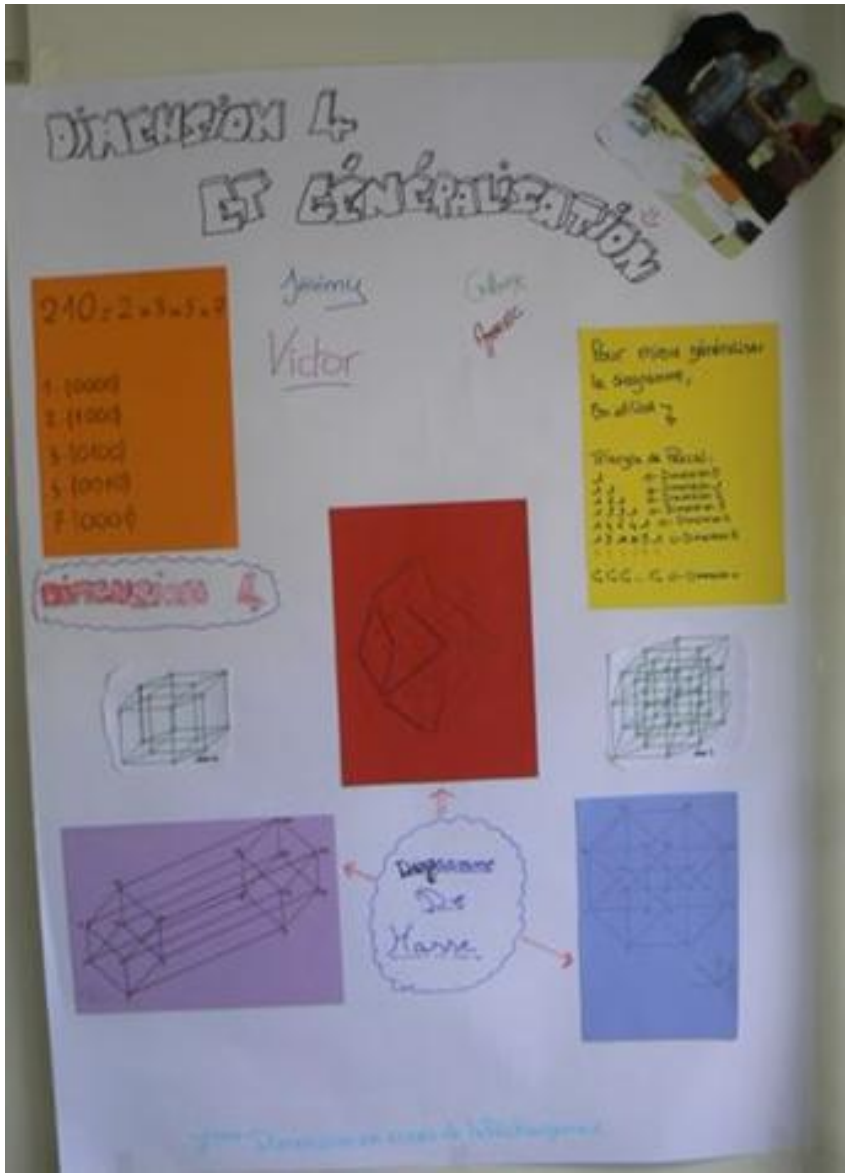
Travail du groupe 3



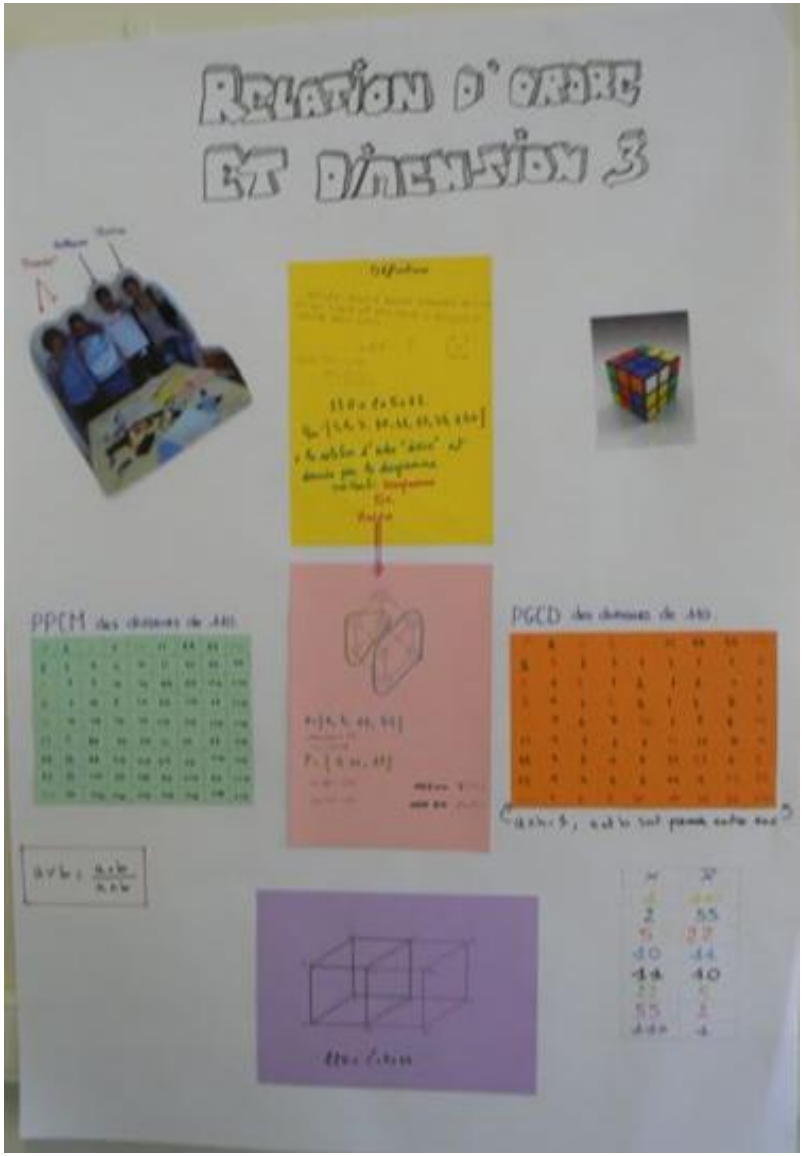
Travail du groupe 4



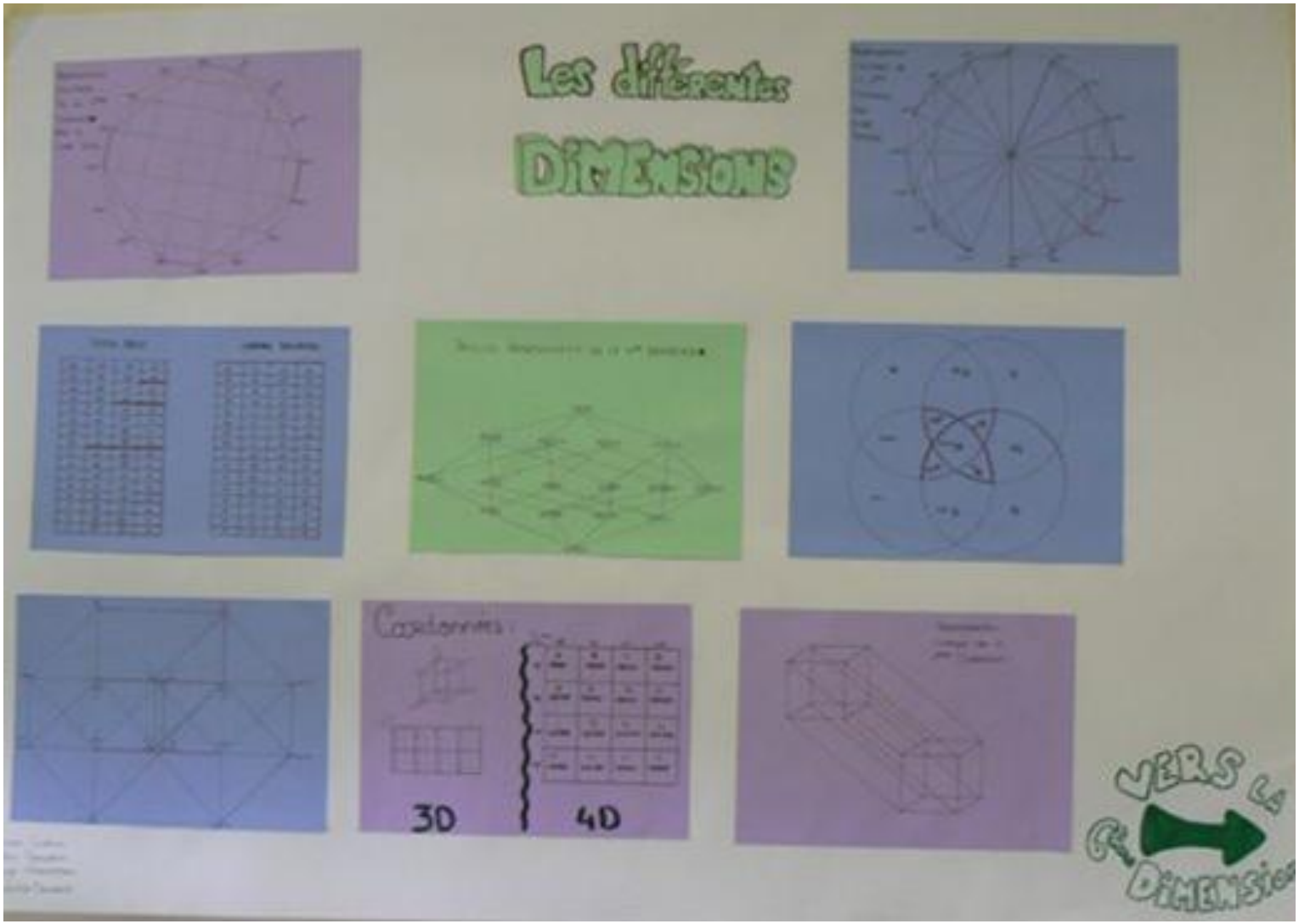
Travail du groupe 5



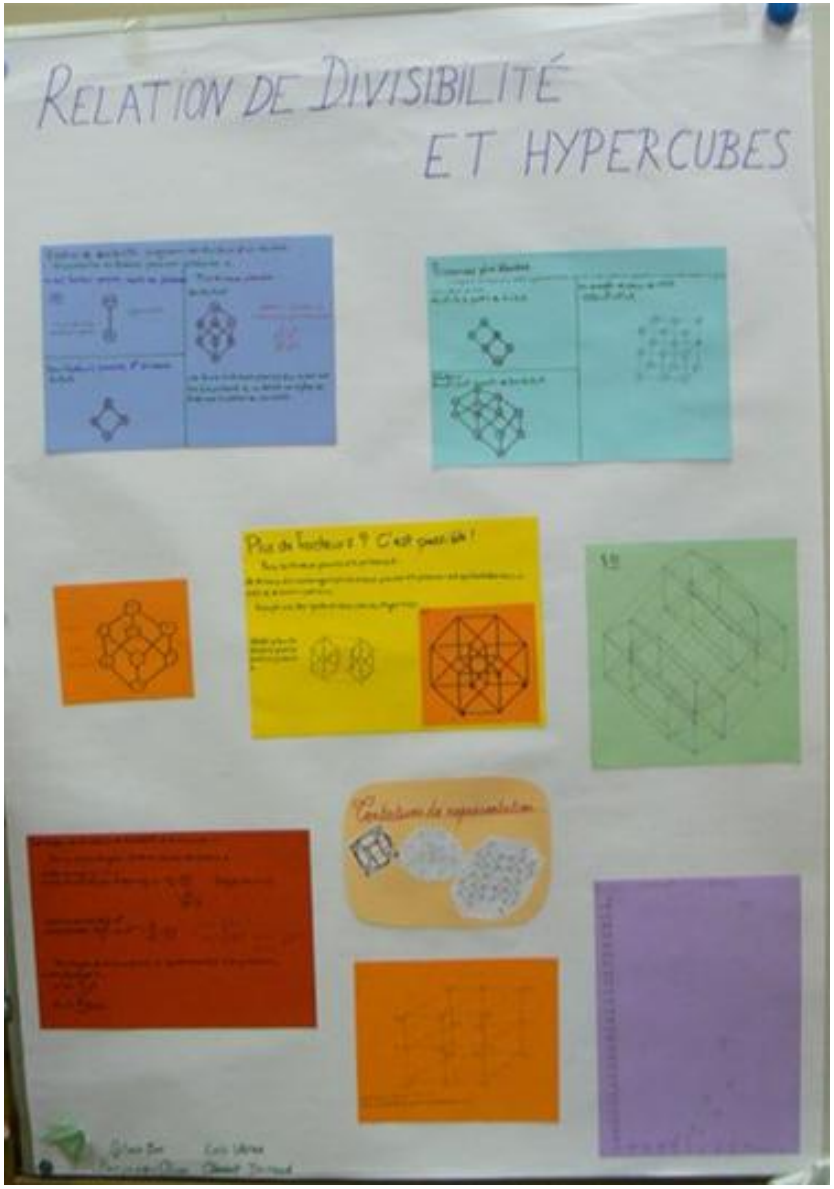
Travail du groupe 6

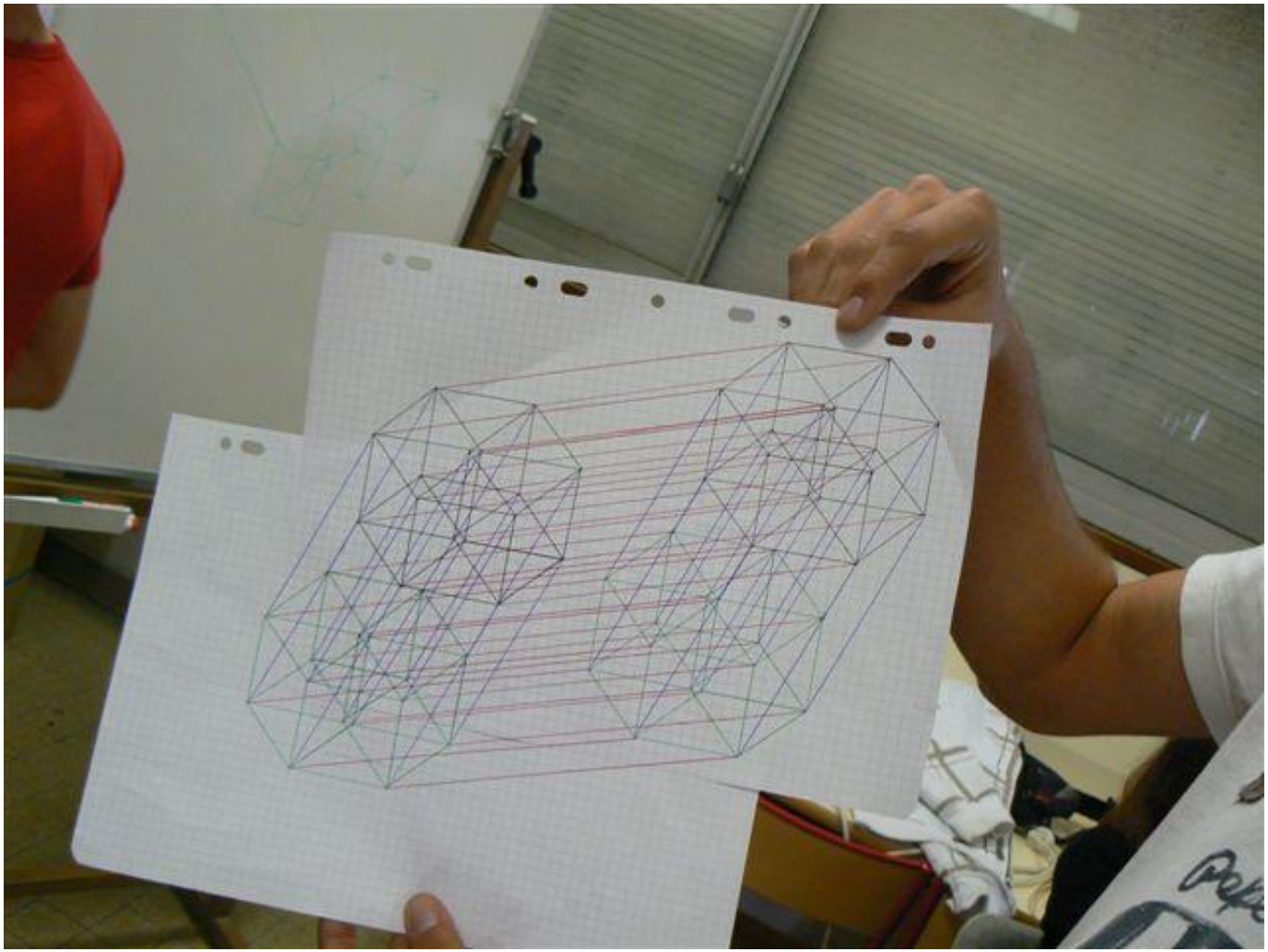


Travail du groupe 2



Travail du groupe 1



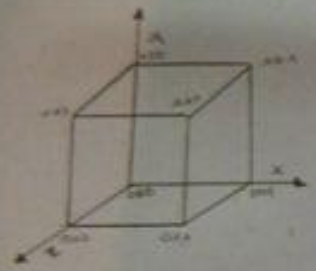


C’est beau les maths en dimension 6 !

Un petit zoom sur chaque poster

Les différentes DIMENSIONS

Coordonnées :



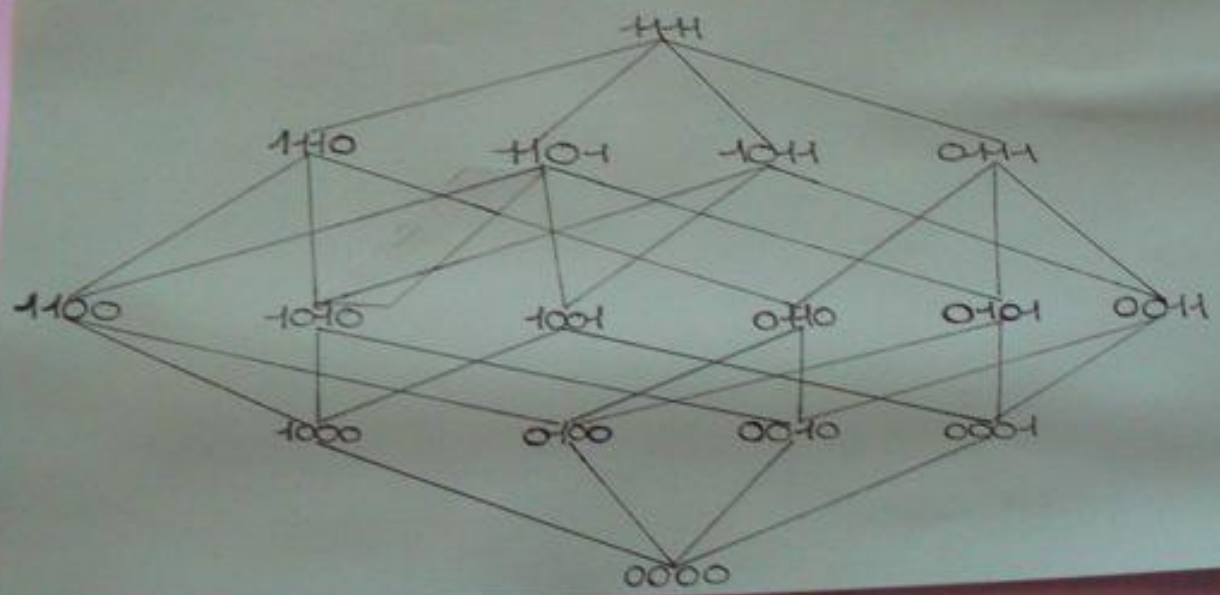
z \ xy				
	x : 0 y : 0 z : 0	x : 1 y : 0 z : 0	x : 1 y : 1 z : 0	x : 0 y : 1 z : 0
	x : 0 y : 0 z : 1	x : 1 y : 0 z : 1	x : 1 y : 1 z : 1	x : 1 y : 1 z : 0

3D

z \ xy	00	01	11	10
00	A 0000	B 0001	C 0011	D 0010
01	E 0100	F 0101	G 0111	H 0110
11	I 1100	J 1101	K 1111	L 1110
10	M 1000	N 1001	O 1011	P 1010

4D

TREILLIS REPRÉSENTATIF DE LA 4ème DIMENSION

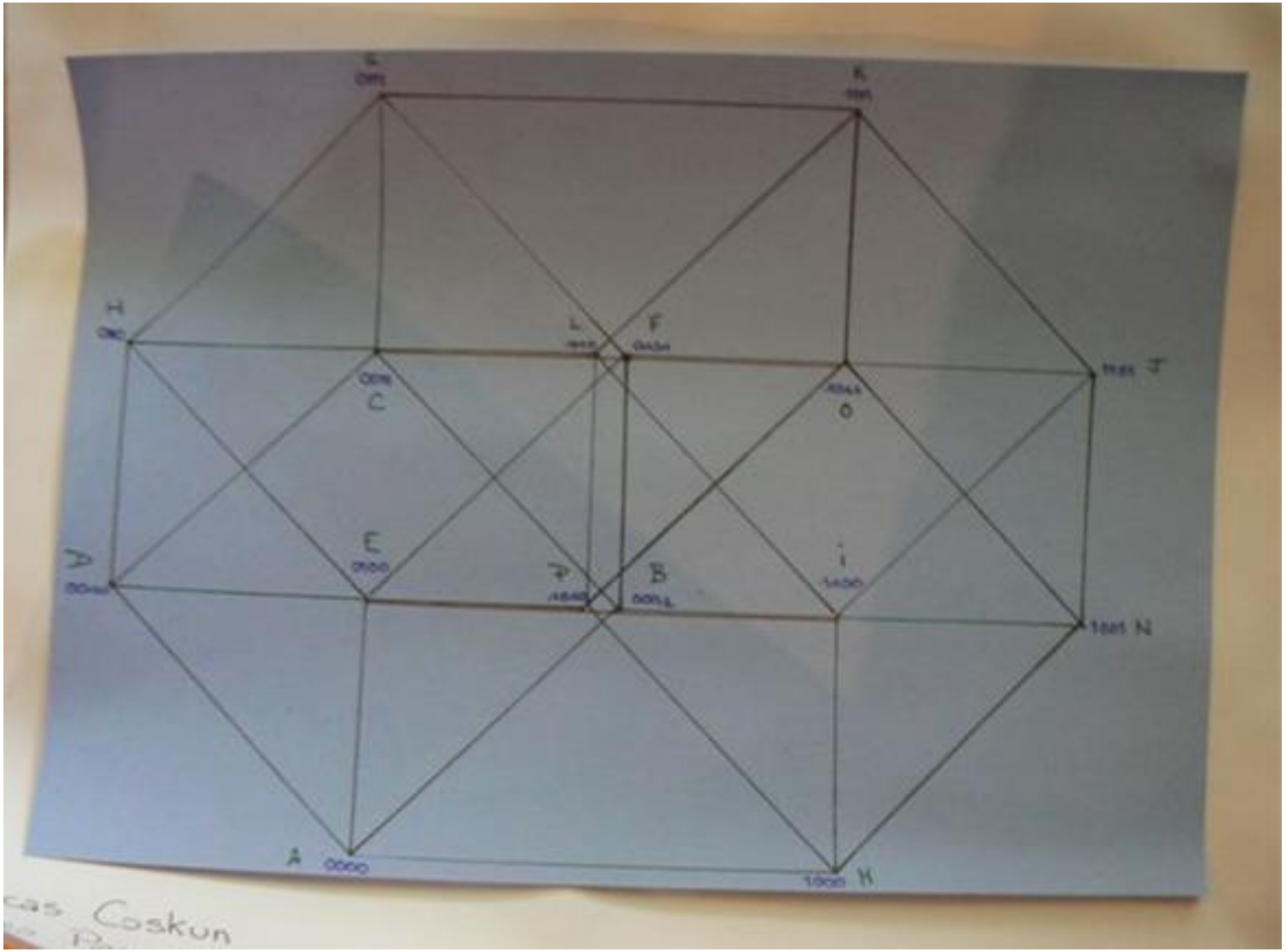


CODE GRAY

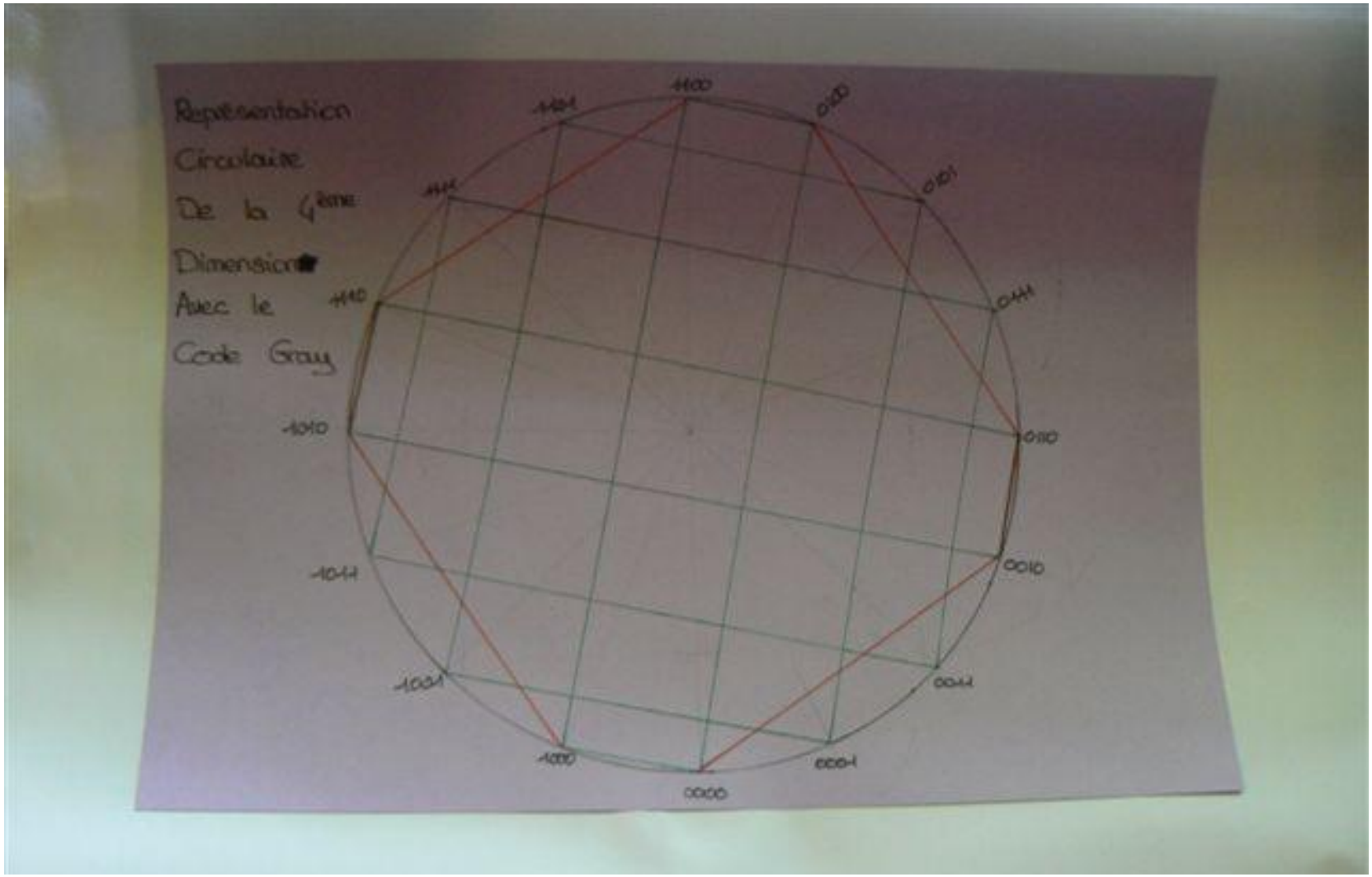
0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	1
0	0	1	0
0	1	1	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	1	0	0
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	1
1	1	1	0
1	0	1	0
1	0	1	1
1	0	0	1
1	0	0	0

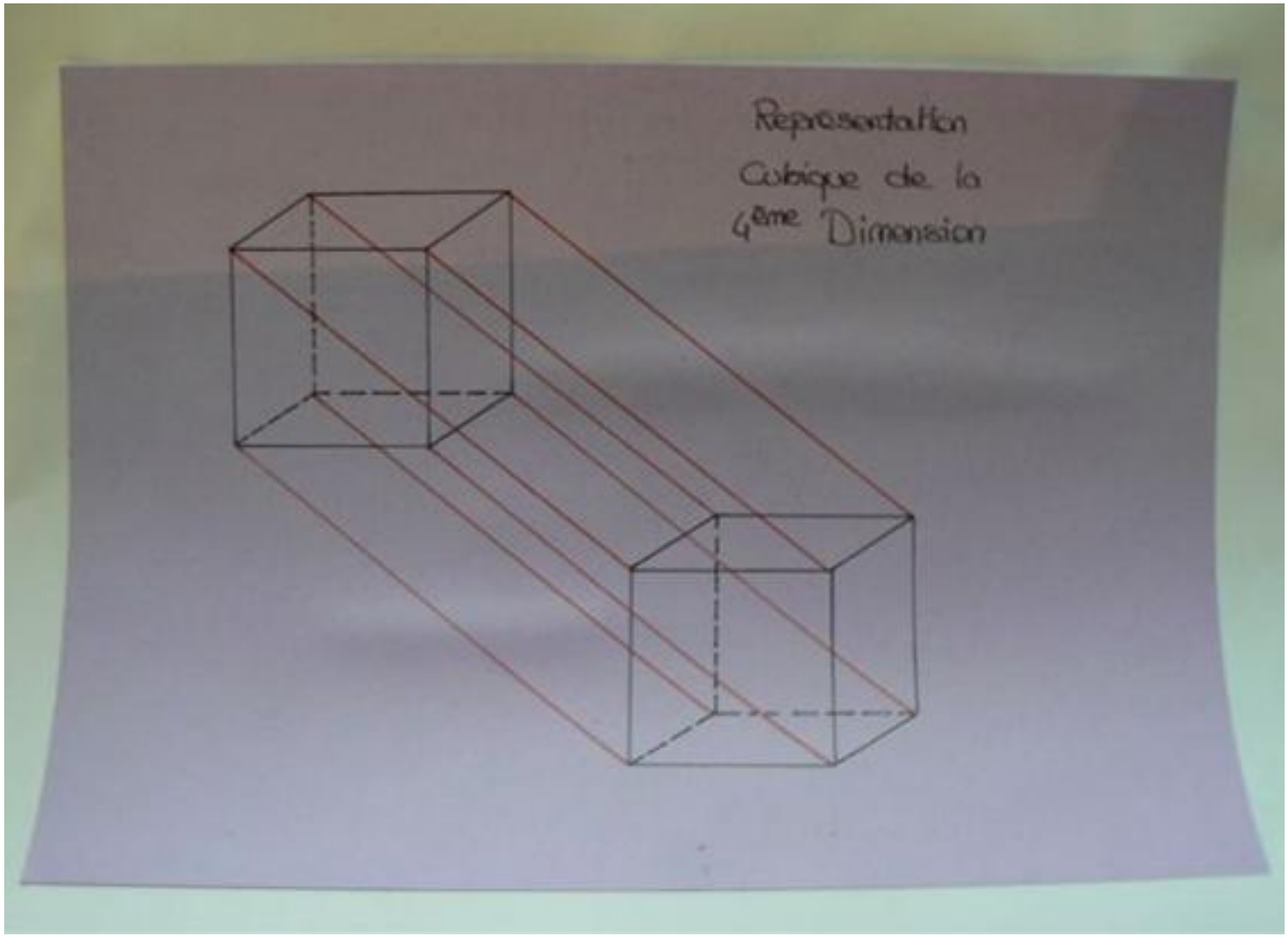
ORDRE BINAIRE

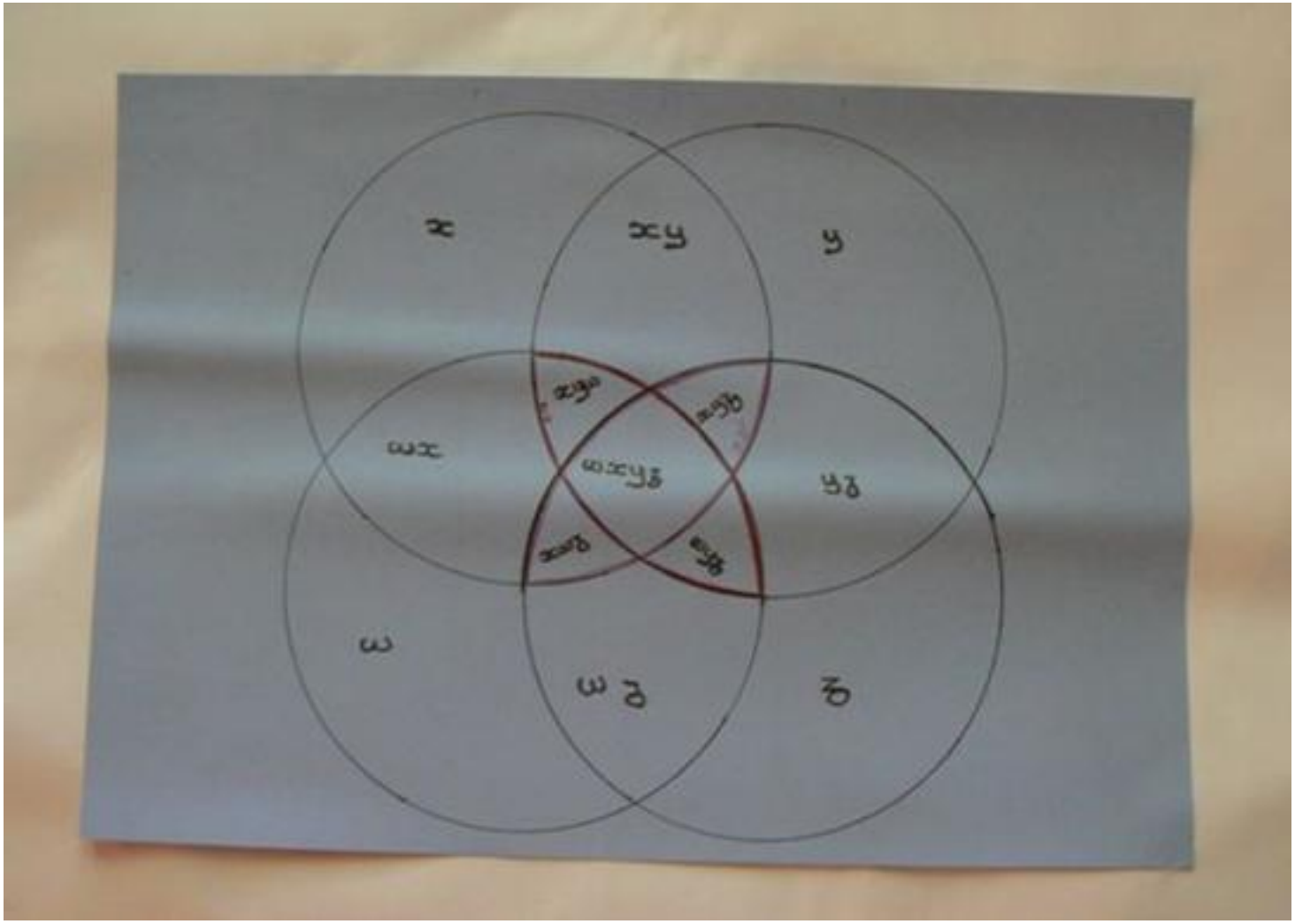
0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1

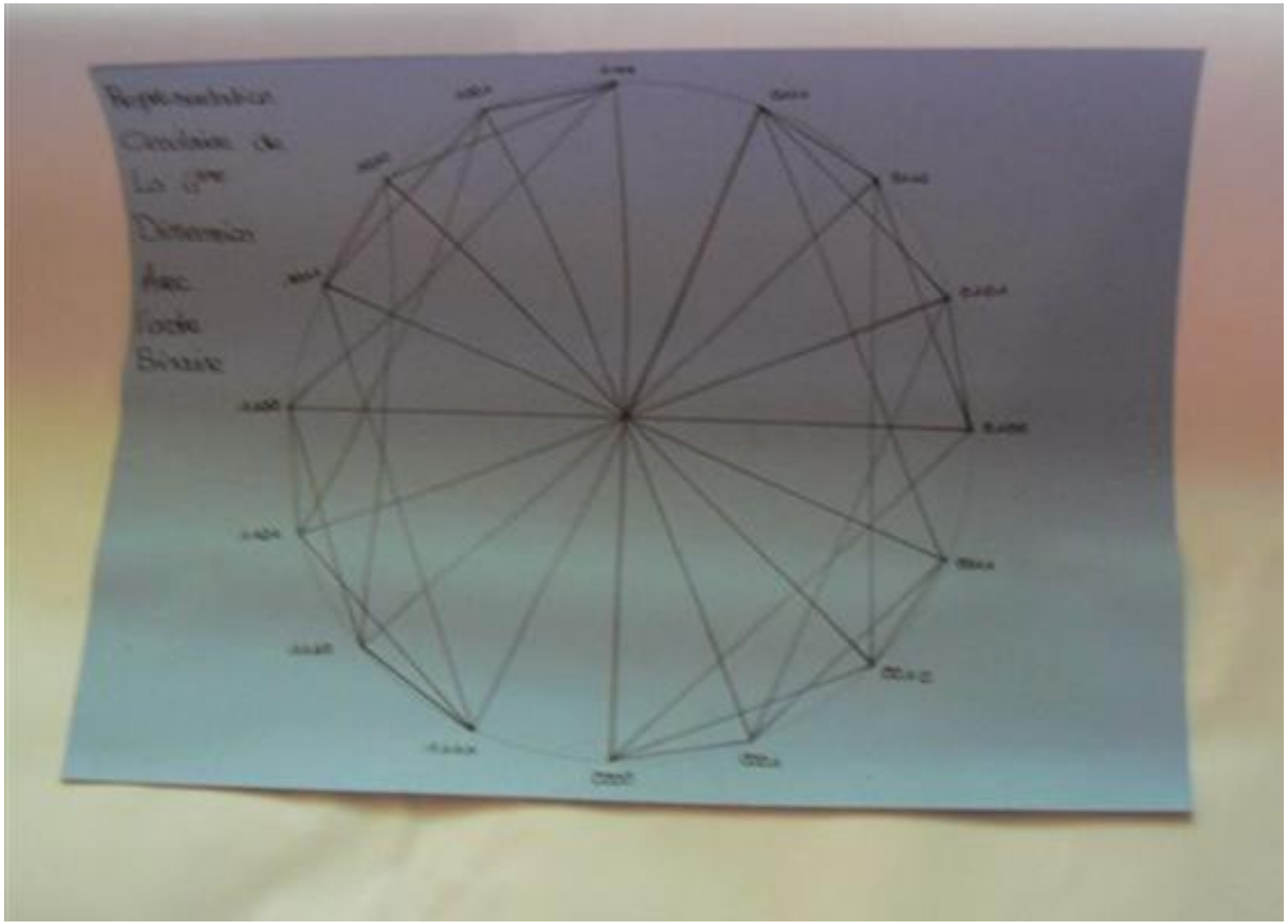


cas Coskun


Representation
Circulaire
De la 4ème
Dimension
Avec le
Code Gray
1100
0100
1101
0101
1111
0111
1110
0110
1010
0010
1011
0011
1001
0001
1000
0000


Representation
Cubique de la
4ème Dimension


x
xy
y
xyz
xyz
wx
wxyz
yz
xwz
xyz
w
wz
z


Representación
Circular de
La 6ta
Dimensión
Arc
Toda
Sinare

Les Treillis

ce qui un treillis ?

thématiques un treillis est un ensemble
ment ordonné dans lequel chaque couple
nt admet une borne inférieure et
e supérieure. On parle aussi d'espace

Qu'est ce qu'un treillis ?

En mathématiques un treillis est un ensemble partiellement ordonné dans lequel chaque couple d'élément admet une borne inférieure et une borne supérieure. On parle aussi d'espace réticulé.

Treillis distributif complémenté

∧	a	b	c	d	e	f	g
a	a	b	c	d	e	f	g
b	b	b	g	g	e	g	g
c	c	g	c	d	g	f	g
d	d	g	d	d	g	f	g
e	e	e	g	g	e	g	g
f	f	g	f	f	g	f	g
g	g	g	g	g	g	g	g

∨	a	b	c	d	e	f	g
a	a	a	a	a	a	a	a
b	a	b	a	a	b	a	b

$b \wedge (e \vee f) = b$

$(b \wedge e) \vee (b \wedge f) = e$

$b \vee (e \wedge f) = b$

$(b \vee e) \wedge (b \vee f) = e$

Le treillis est DISTRIBUTIF car la loi ∨ est distributive de la loi ∧ (ou inversement)

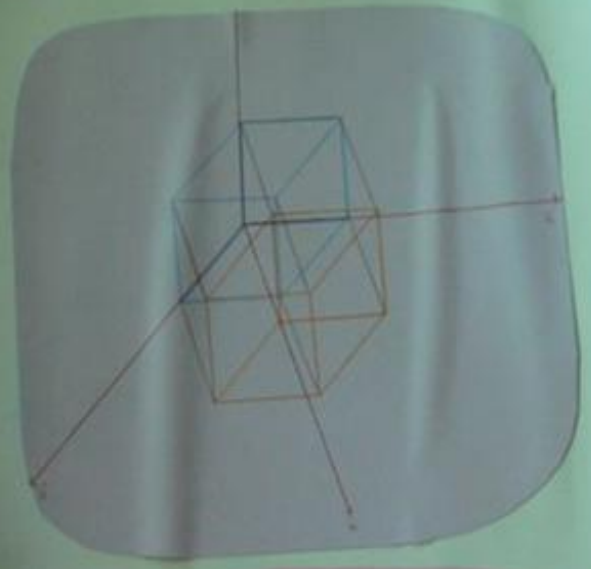
Ce treillis est aussi borné car il possède un maximum (a) et un minimum (g).

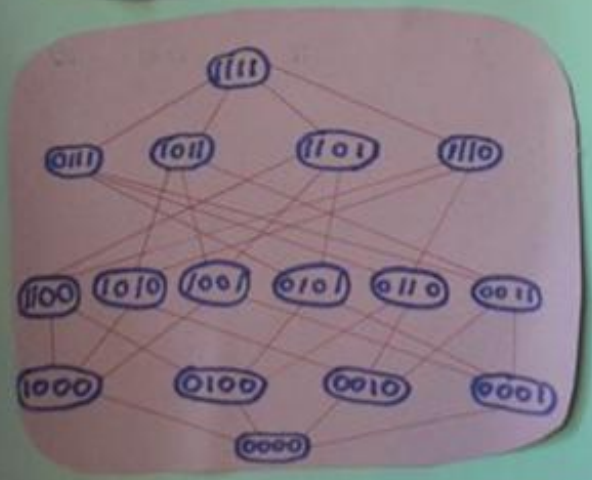
Ce treillis est complémenté car chaque x possède un complément y tel que : $x \wedge y = g$ et $x \vee y = a$

a	b	c	d	e	f	g
g	f	d	c	b	e	a

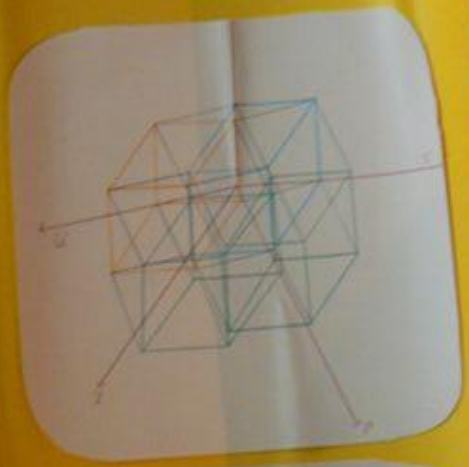
complémentation

Treillis booléens 4e dimension





Treillis booléens
5 dimension



Treillis non distribu complementé

$b \wedge (c \vee d) = b$

$(b \vee c) \wedge (b \vee d) = a$

a	b	c	d	e
e	cd	bd	cb	a

Le treillis n'est pas distributif car la loi $\vee$ n'est pas distributif de la loi $\wedge$.

Mais ce treillis est complémenté car chaque x possède un complément y tel que :

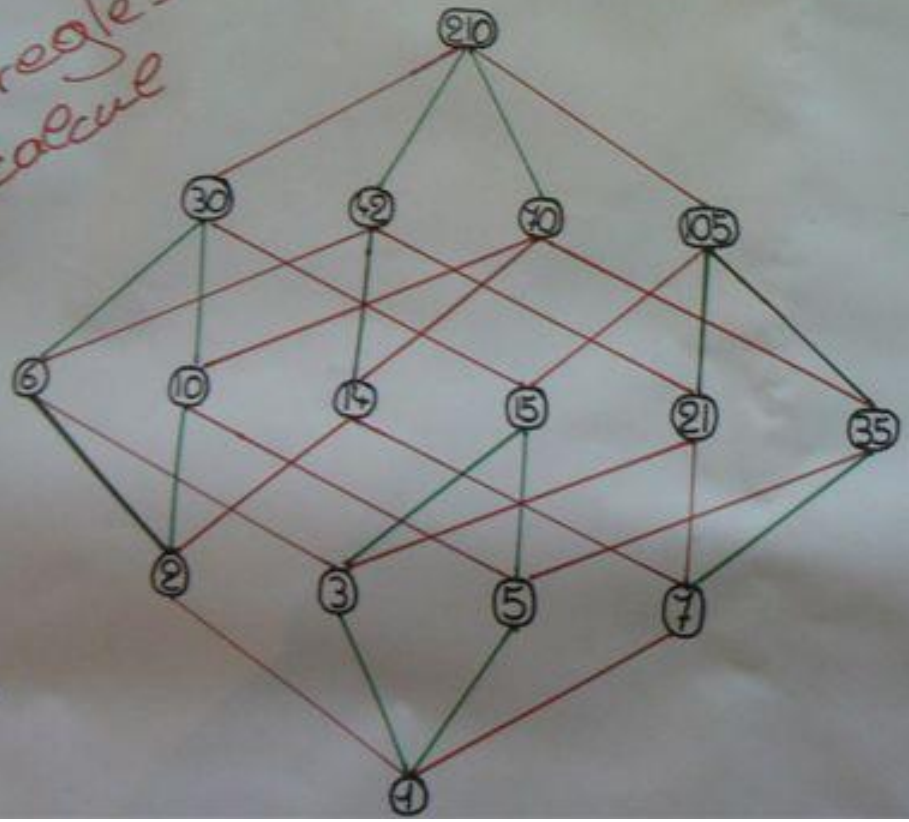
$x \wedge y = a$ et $x \vee y = e$.

inf	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	b	a	a	a
c	a	a	c	c	c
d	a	a	c	d	c
e	a	a	c	c	e

sup	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	b	b	a	a
c	a	b	c	d	e
d	a	a	d	d	a
e	a	a	e	a	e

Les Différents Treillis

-50%
Sur les regles
de calcul



DEFINITION :

Soit E un ensemble ordonné, et F une partie de E :

$x \in E$ est :

- un minorant de F si $\forall y \in F, x \leq y$
- un majorant de F si $\forall y \in F, y \leq x$

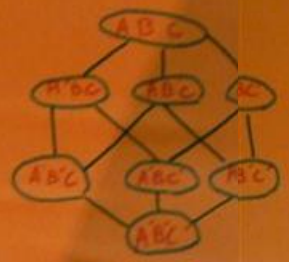
Le saviez-vous

Il existe une équivalence entre les fonctions logiques en électroniques et les mathématiques :

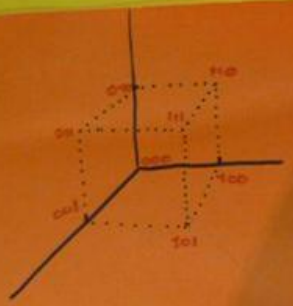
- La fonction "ou" correspond en math à l'union ("∪") se calcul grâce au PPCM
- La fonction "et" correspond en math à l'intersection ("∩") qui est le PGCD.

Différentes représentations du treillis

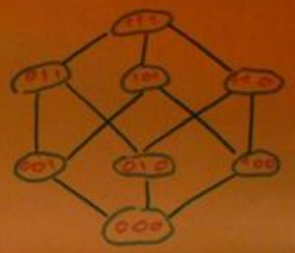
Théorie des sous ensembles



Treillis d'après la théorie des sous ensembles



Représentation Graphique.



Treillis et représentation Binaire

V	1	2	3	5	6	7	10	14	15	21	30	35	42	70	105	210
1	1															
2	2	2														
3	3	6	3													
5	5	10	15	5												
6	6	6	6	30	6											
7	7	14	21	35	42	7										
10	10	10	30	10	30	70	10									
14	14	42	42	70	42	42	70	14								
15	15	30	30	30	30	105	30	210	15							
21	21	42	42	105	42	42	210	42	105	21						
30	30	30	30	30	30	210	30	210	30	210	30					
35	35	70	105	105	210	70	70	70	105	105	210	35				
42	42	42	42	210	42	42	210	42	210	42	210	210	42			
70	70	70	210	70	210	70	70	210	210	210	210	70	210	70		
105	105	210	105	105	210	105	210	210	105	105	210	105	210	210	105	
210	210	210	210	210	210	210	210	210	210	210	210	210	210	210	210	210

Λ	1	2	3	5	6	7	10	14	15	21	30	35	42	70	105	210
1	1															
2	1	2														
3	1	1	3													
5	1	1	1	5												
6	1	2	1	1	6											
7	1	1	1	1	1	7										
10	1	2	1	1	2	1	10									
14	1	2	1	1	2	7	2	14								
15	1	1	3	5	3	1	5	1	15							
21	1	1	3	1	1	3	1	1	1	21						
30	1	2	3	5	6	1	10	2	15	3	30					
35	1	1	1	5	1	7	5	1	5	1	5	35				
42	1	2	3	1	6	7	2	7	3	21	3	7	42			
70	1	2	1	5	2	7	10	7	5	7	5	35	7	70		
105	1	1	3	5	3	7	5	7	5	21	5	35	7	7	105	
210	1	2	3	5	6	7	10	14	15	21	30	35	42	70	105	210

Le treillis est il complet ?

Les diviseurs de 270 :

$270 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$

$x = 2^{p} \times 3^{q} \times 5^{r} \times 7^{s}$

$0 \leq p \leq 1$
$0 \leq q \leq 3$
$0 \leq r \leq 1$
$0 \leq s \leq 1$

$A \vee x = 270$

$A \wedge x = 1$

$\text{ou } A = 90$ $\quad 90 \vee x = 270$

$2^{1} \times 3^{2} \vee 2^{p} \times 3^{q} \times 5^{r} \times 7^{s} = 270$

$x = 3 \times 7 = 21$

$x = \frac{a}{A}$ $\quad x = \frac{270}{90} = 21$

Les diviseurs de 60

$60 = 2^{2} \times 3 \times 5$

$x = 2^{p} \times 3^{q} \times 5^{r}$

$0 \leq p \leq 2$
$0 \leq q \leq 1$
$0 \leq r \leq 1$

$A \vee x = 60$

$A \wedge x = 1$ $\quad \text{ou } A = 6$

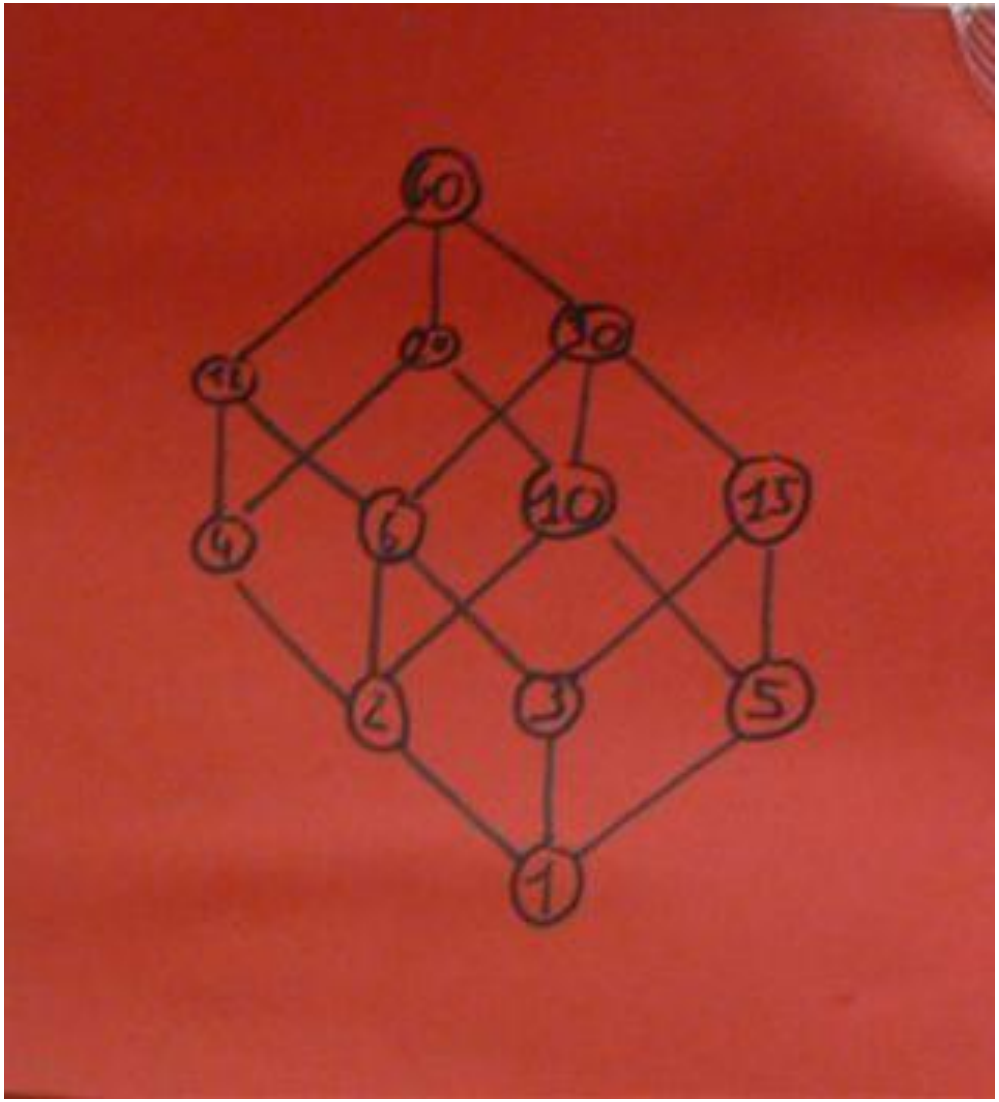
$x = \frac{60}{6} = 10$

$\text{quand } 10 \wedge 6 = 2$

Ce treillis est il distributif ?

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$
$$b \wedge (a \vee c) = (b \wedge a) \vee (b \wedge c)$$
$$c \wedge (b \vee a) = (c \wedge b) \vee (c \wedge a)$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$
$$b \vee (a \wedge c) = (b \vee a) \wedge (b \vee c)$$
$$c \vee (b \wedge a) = (c \vee b) \wedge (c \vee a)$$


10
10
15
5
1

∨	1	2	3	4	5	6	10	12	15	20	30	60
1	1											
2	2	2										
3	3	6	3									
4	4	4	12	4								
5	5	10	15	20	5							
6	6	6	6	12	30	6						
10	10	10	30	20	10	30	10					
12	12	12	12	12	60	12	60	12				
15	15	30	15	60	15	30	30	60	15			
20	20	20	60	20	20	60	20	60	60	20		
30	30	30	30	60	30	30	30	60	30	60	30	
60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60

∧	1	2	3	4	5	6	10	12	15	20	30	60
1	1											
2	1	2										
3	1	1	3									
4	1	2	1	4								
5	1	1	1	1	5							
6	1	2	3	2	1	6						
10	1	2	1	2	5	2	10					
12	1	2	3	4	1	6	2	12				
15	1	1	3	1	5	3	5	3	15			
20	1	2	1	4	5	2	10	4	5	20		
30	1	2	3	2	5	6	10	6	15	10	30	
60	1	2	3	4	5	6	10	12	15	20	30	60

∨	1	2	3	4	5	6	10	12	15	20	30	60
1	1											
2	2	2										
3	3	6	3									
4	4	4	12	4								
5	5	10	15	20	5							
6	6	6	6	12	30	6						
10	10	10	30	20	10	30	10					
12	12	12	12	12	60	12	60	12				
15	15	30	15	60	15	30	30	60	15			
20	20	20	60	20	20	60	20	60	60	20		
30	30	30	30	60	30	30	30	60	30	60	30	
60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60

∧	1	2	3	4	5	6	10	12	15	20	30	60
1	1											
2	1	2										
3	1	1	3									
4	1	2	1	4								
5	1	1	1	1	5							
6	1	2	3	2	1	6						
10	1	2	1	2	5	2	10					
12	1	2	3	4	1	6	2	12				
15	1	1	3	1	5	3	5	3	15			
20	1	2	1	4	5	2	10	4	5	20		
30	1	2	3	2	5	6	10	6	15	10	30	
60	1	2	3	4	5	6	10	12	15	20	30	60

RELATION D'ORDRE ET DIMENSION 3

Thomas
Justine

Définitions

Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après le théorème fondamentale de l'arithmétique, n'importe quel entier naturel se décompose en produit de facteurs premiers.

$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ $\quad \begin{cases} p_i \text{ est premier} \\ \alpha_i \in \mathbb{N} \end{cases}$

Exemple : Pour $n = 110$

$110 = 2 \times 55$
$= 2 \times 5 \times 11$

$$110 = 2 \times 5 \times 11.$$

$$D_{110} = \{1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110\}$$

- la relation d'ordre "divise" est donnée par le diagramme suivant : Diagramme De Hasse

$E = \{1, 5, 11, 55\}$

$\max(E) = 55$

$\min(E) = 1$

$F = \{2, 10, 22\}$

$\max(F) = \{22\}$

$\min(F) = \{2\}$

max $\leftrightarrow$ $\vee$ (PPCM)

min $\leftrightarrow$ $\wedge$ (PGCD)

PGCD des diviseurs de 110.

∧	1	2	5	10	11	22	55	110
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2	1	2
5	1	1	5	5	1	1	5	5
10	1	2	5	10	1	2	5	10
11	1	1	1	1	11	11	11	11
22	1	2	1	2	11	22	1	2
55	1	1	5	5	11	1	55	55
110	1	2	5	10	11	22	55	110

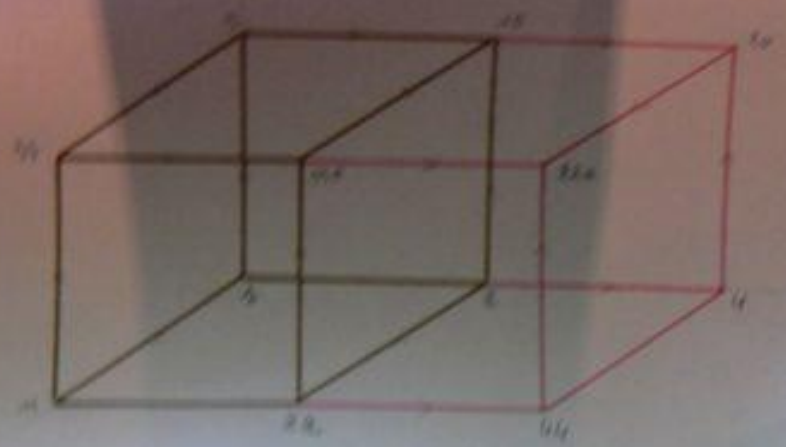
$a \wedge b = 1$, a et b sont premier entre eux

x	$\overline{x}$
1	110
2	55
5	22
10	11
11	10
22	5
55	2
110	1

PPCM des diviseurs de 110.

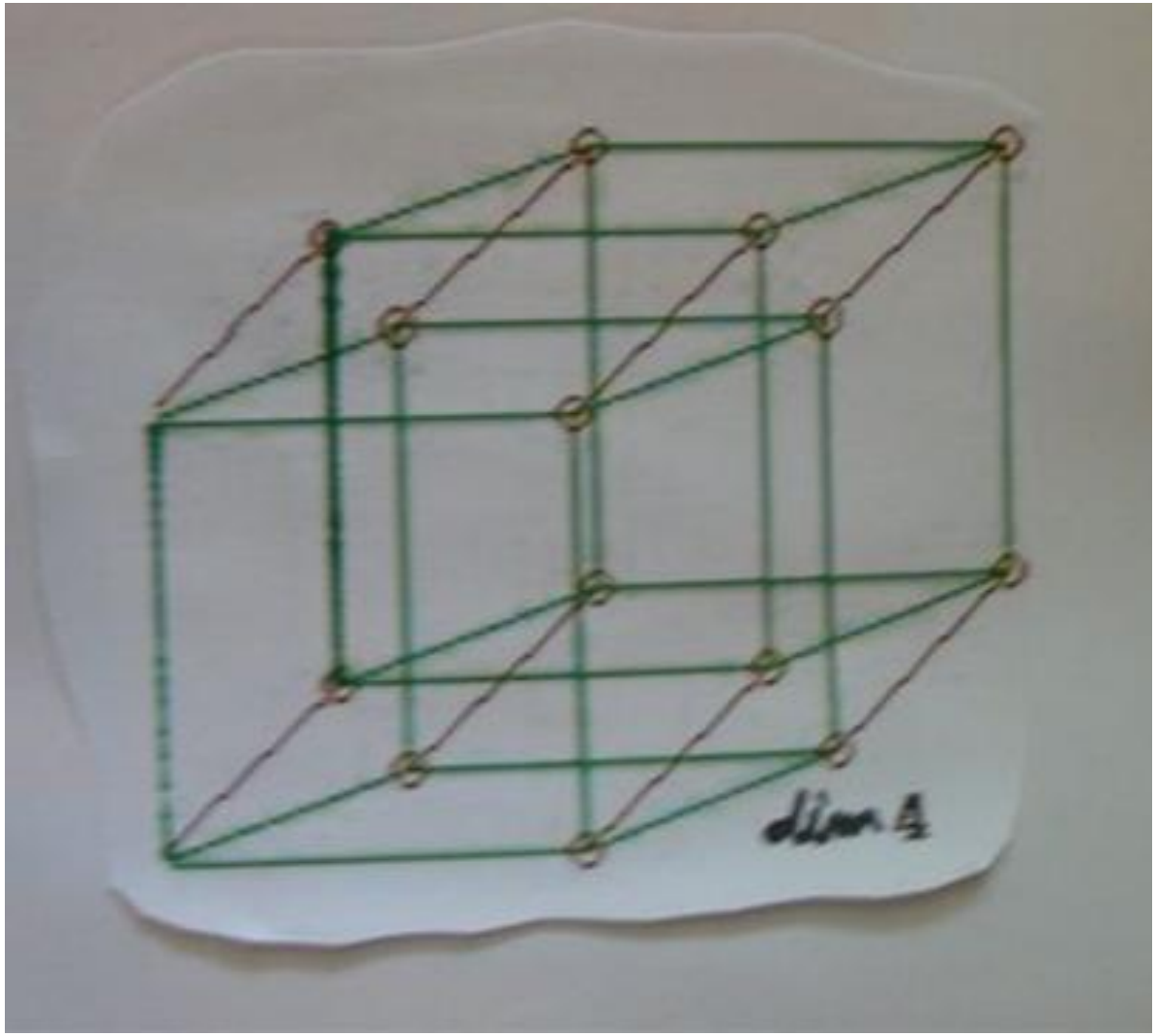
V	1	2	5	10	11	22	55	110
1	1	2	5	10	11	22	55	110
2	2	2	10	10	22	22	110	110
5	5	10	5	10	55	110	55	110
10	10	10	10	10	110	110	110	110
11	11	22	55	110	11	22	55	110
22	22	22	110	110	22	22	110	110
55	55	110	55	110	55	110	55	110
110	110	110	110	110	110	110	110	110

$$\boxed{a \vee b = \frac{a \times b}{a \wedge b}}$$



$$220 = 2^2 \times 5 \times 11$$

DIMENSION 4
ET GÉNÉRALISATION
Jérémy
Guillaume
Victor
210 = 2 × 3 × 5 × 7
1 · (0000)
2 · (1000)
3 · (0100)
5 · (0010)
7 · (0001)
Pour mieux
le diagramme,
On utilise
Triangle de Pascal :


dim 4

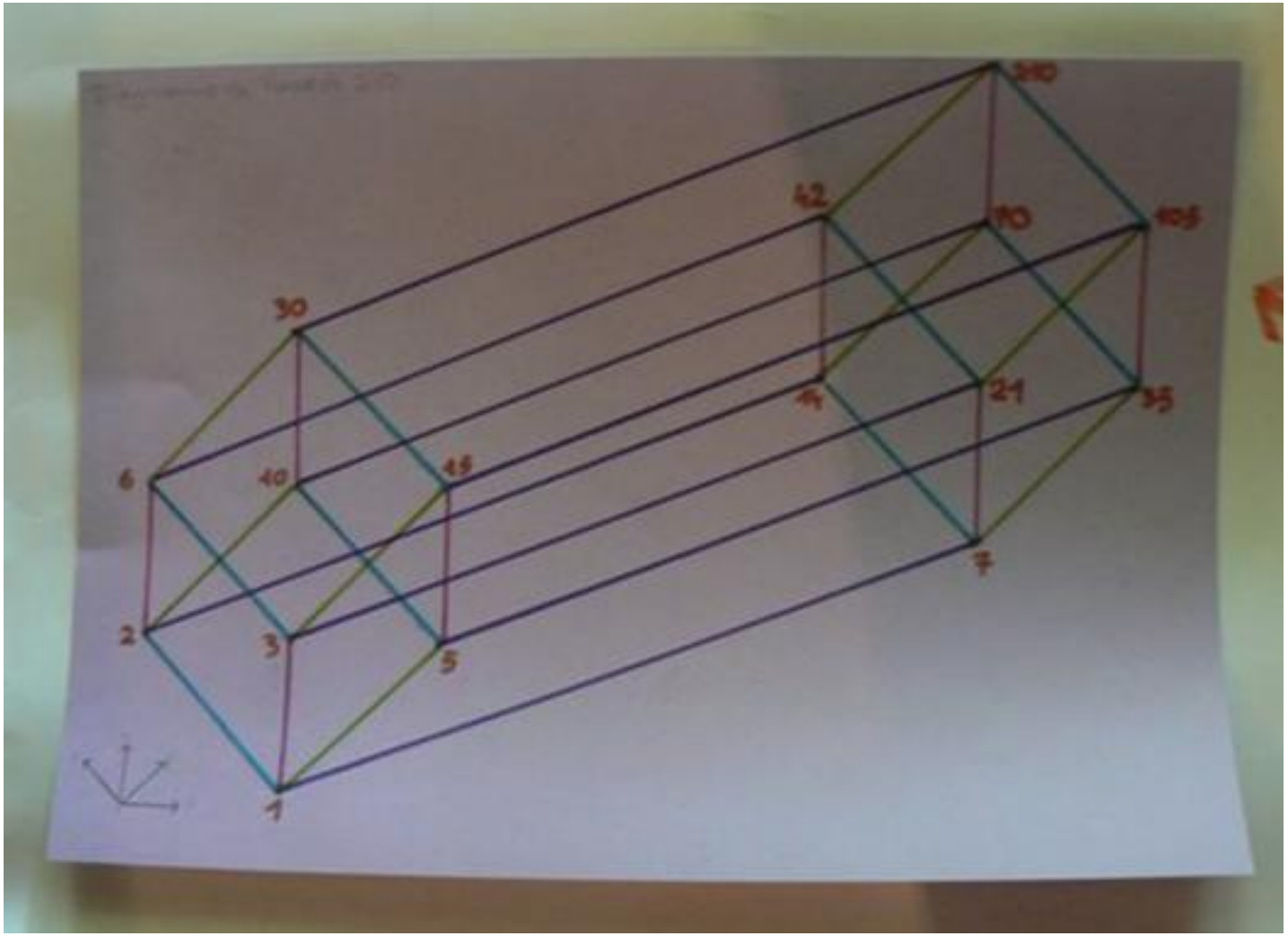
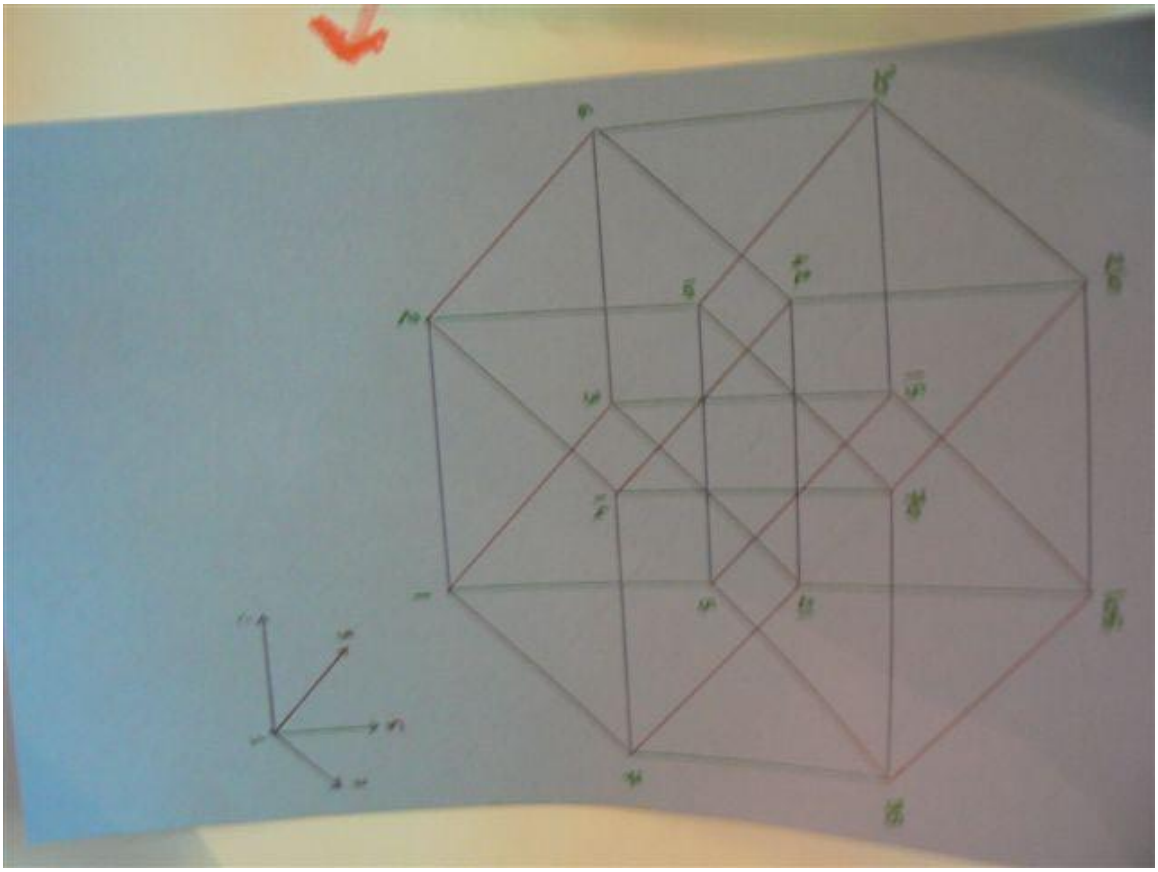

30
42
105
6
10
15
14
21
35
2
3
5
7
1

Diagramme
De
Hasse



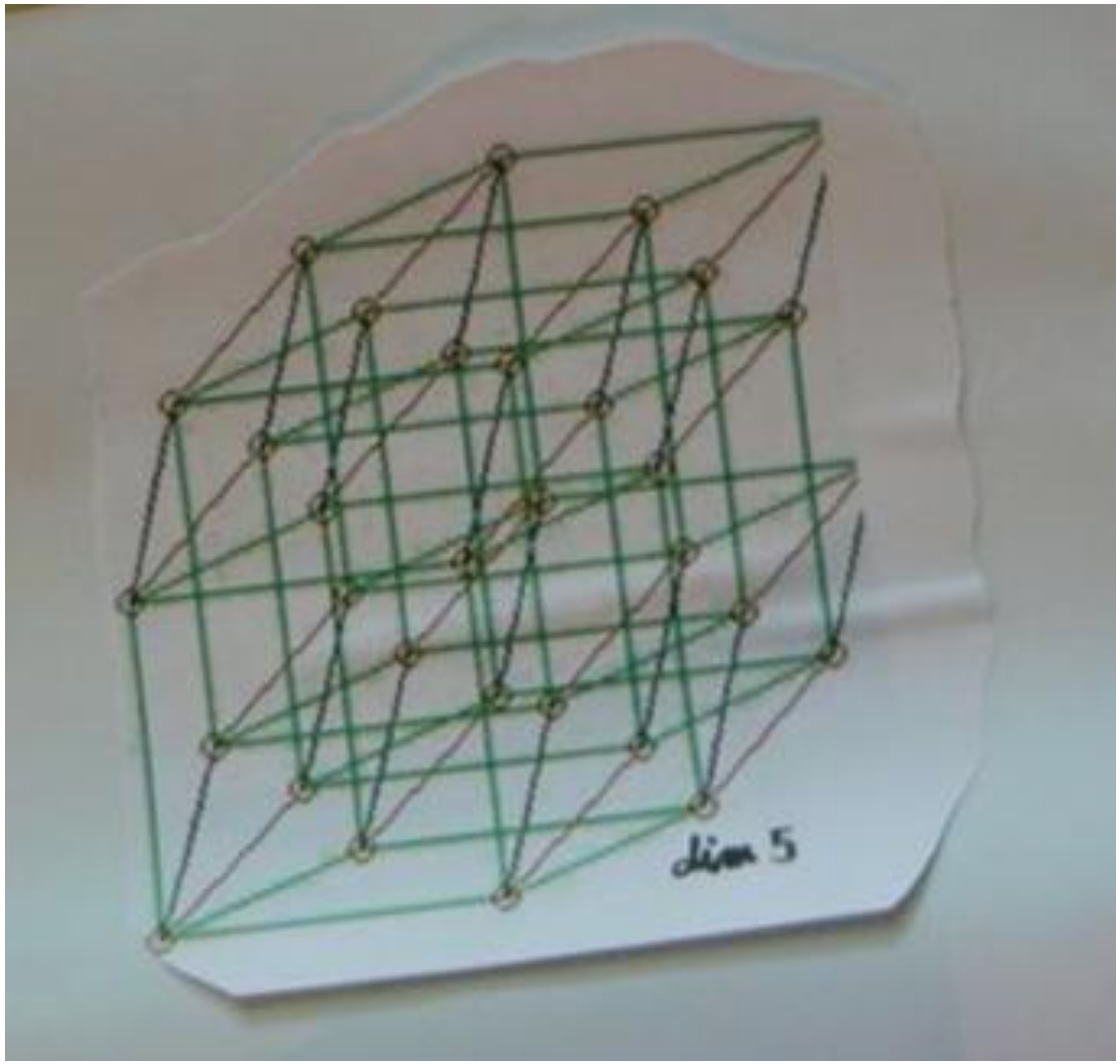
Pour mieux généraliser le diagramme,

On utilise ↓

Triangle de Pascal :

1 ← Dimension 0
1 1 ← Dimension 1
1 2 1 ← Dimension 2
1 3 3 1 ← Dimension 3
1 4 6 4 1 ← Dimension 4
1 5 10 10 5 1 ← Dimension 5
⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

C_n^0 C_n^1 C_n^2 … C_n^n ← Dimension n


dim 5

RELATION DE DIVISIBILITÉ ET HYP

Relation de divisibilité. Diagramme des diviseurs d'un nombre.

Un seul facteur premier, nombres premiers

Trois diviseurs premiers :

$30 = 2 \times 3 \times 5$

Deux facteurs premiers, 2e diviseurs.

$6 = 2 \times 3$

→ Quand les diviseurs premiers d'un nombre sont tous à la puissance 1, on obtient une algèbre de Boole avec la relation de divisibilité.

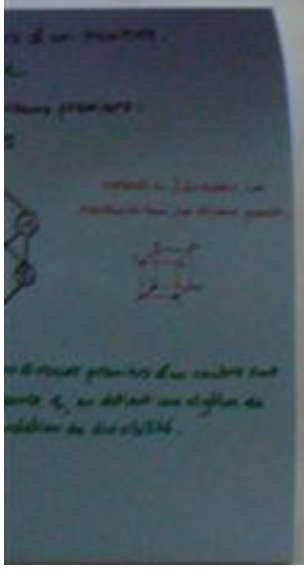
Puissances plus élevées.

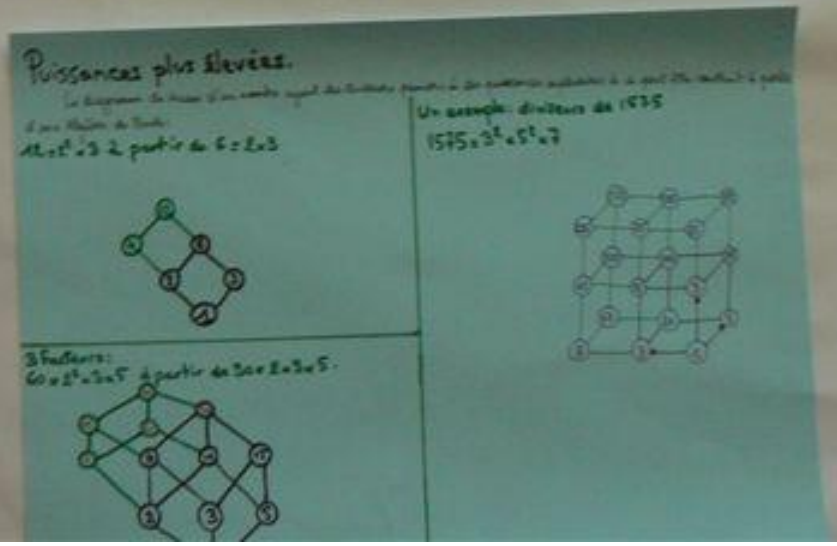
$12 = 2^2 \times 3$ à partir de $6 = 2 \times 3$

3 facteurs :

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$ à partir de $30 = 2 \times 3 \times 5$.

N DE DIVISIBILITÉ ET HYPERCUBES





Relation de divisibilité : Diagramme des diviseurs d'un nombre.

décomposition en facteurs premiers : puissances 1.

Un seul facteur premier, nombres premiers

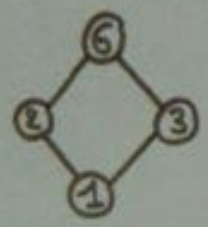
$\boxed{11}$

Algèbre de Boole

Treillis le plus simple, distributif et complémenté

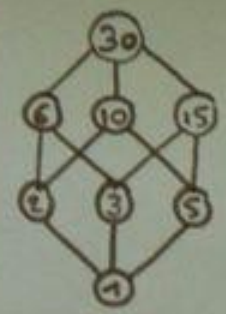
Deux facteurs premiers, 2^2 diviseurs.

$6 = 2 \times 3$

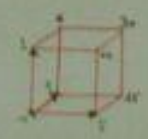


Trois diviseurs premiers :

$30 = 2 \times 3 \times 5$



représenté en 3 dimensions, car 3 vecteurs de base par diviseur premier

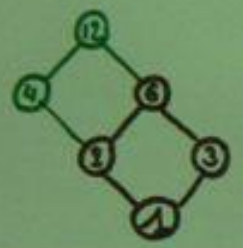


→ Quand les diviseurs premiers d'un nombre sont tous à la puissance 1, on obtient une algèbre de Boole avec la relation de divisibilité.

Puissances plus élevées.

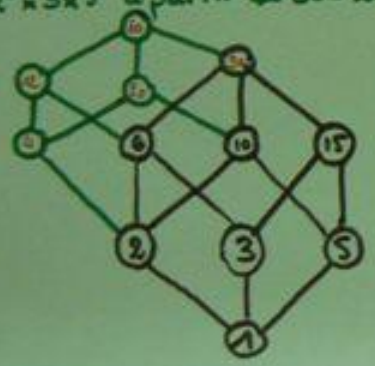
Le diagramme de Hasse d'un nombre ayant des diviseurs premiers à des puissances supérieures à 1 peut être construit à partir d'une Algèbre de Boole :

$12 = 2^2 \times 3$ à partir de $6 = 2 \times 3$



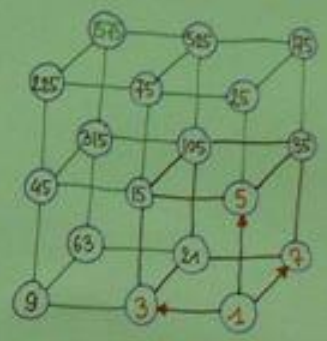
3 facteurs :

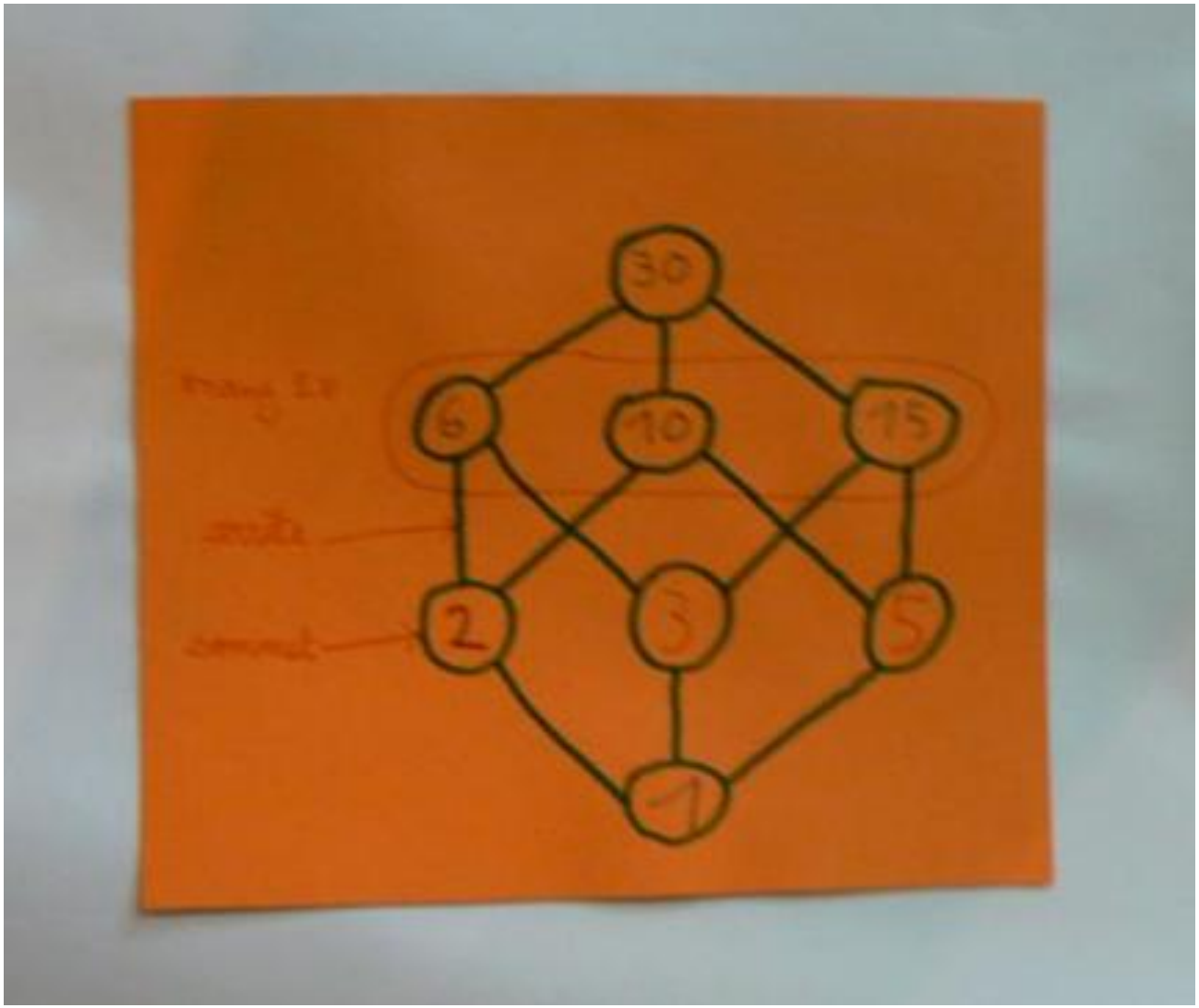
$60 = 2^2 \times 3 \times 5$ à partir de $30 = 2 \times 3 \times 5$.



Un exemple : diviseurs de 1575

$1575 = 3^2 \times 5^2 \times 7$




30
6
10
15
2
3
5
1

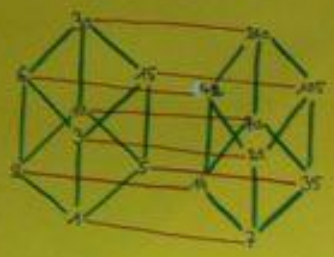
Plus de facteurs ? C'est possible !

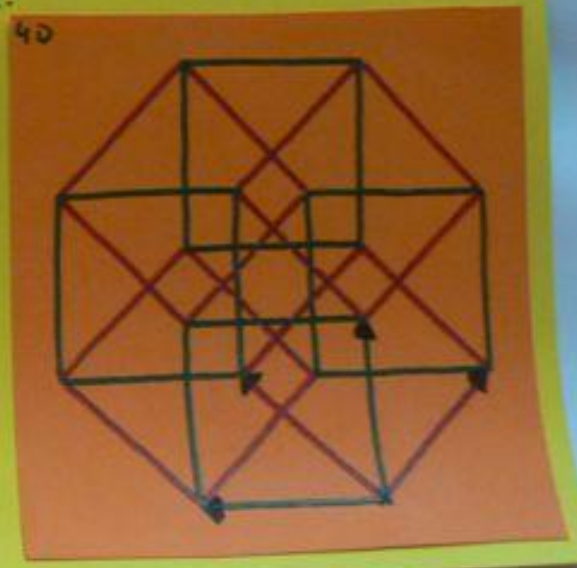
Pours les diviseurs premiers à la puissance 1 :

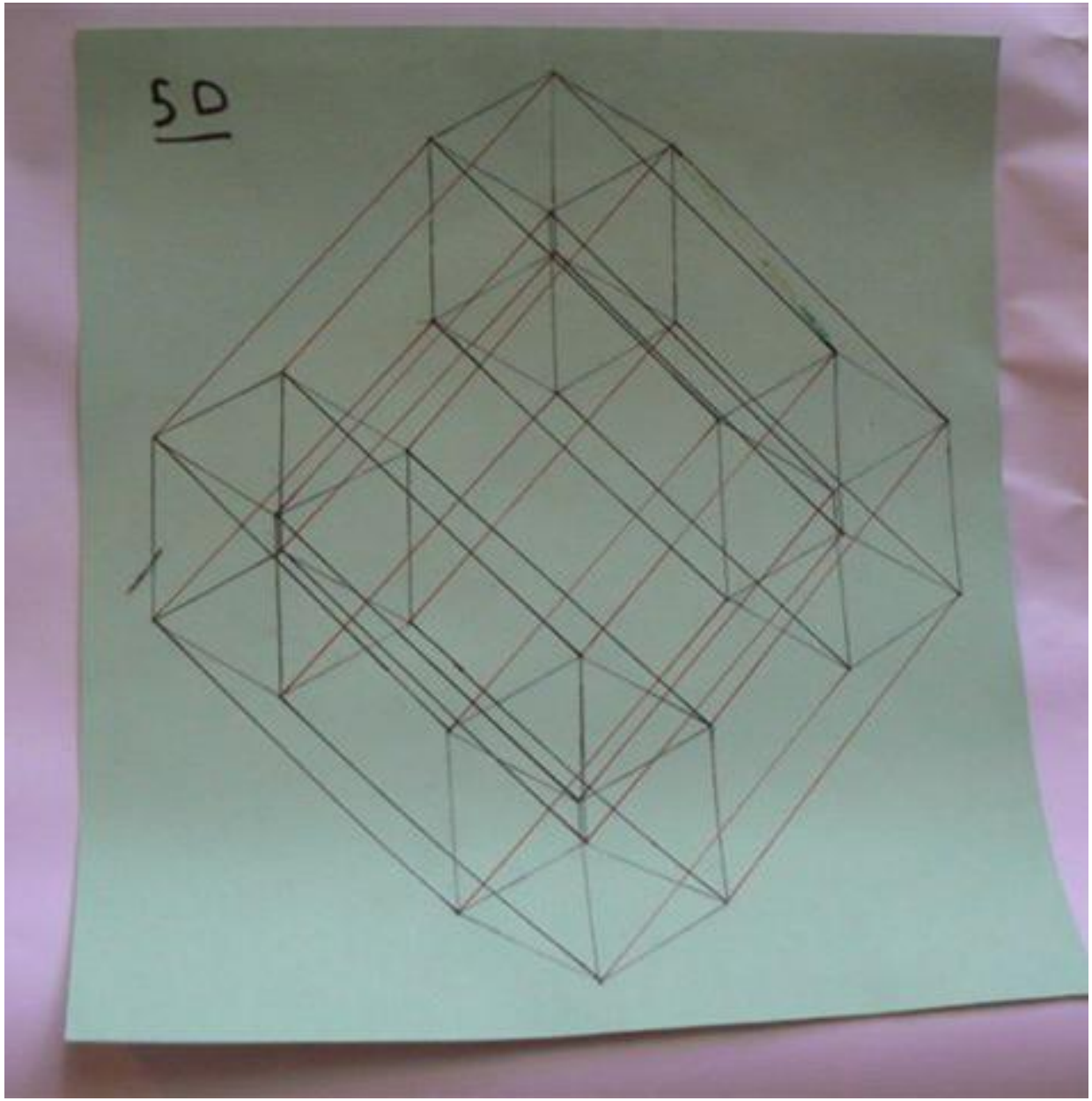
des diviseurs d'un nombre ayant plus de diviseurs premiers à la puissance 1 sont représentables dans un cube de dimension supérieure :

Exemple avec 210 : quatre diviseurs premiers, l'hypercube.

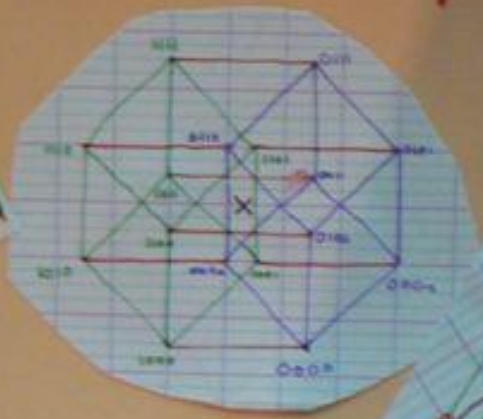
Valable si tous les diviseurs premiers sont à la puissance 1.

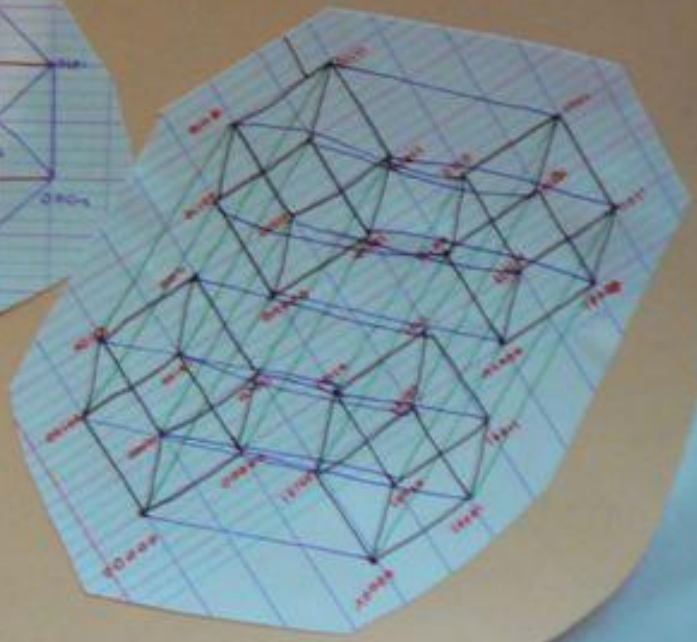


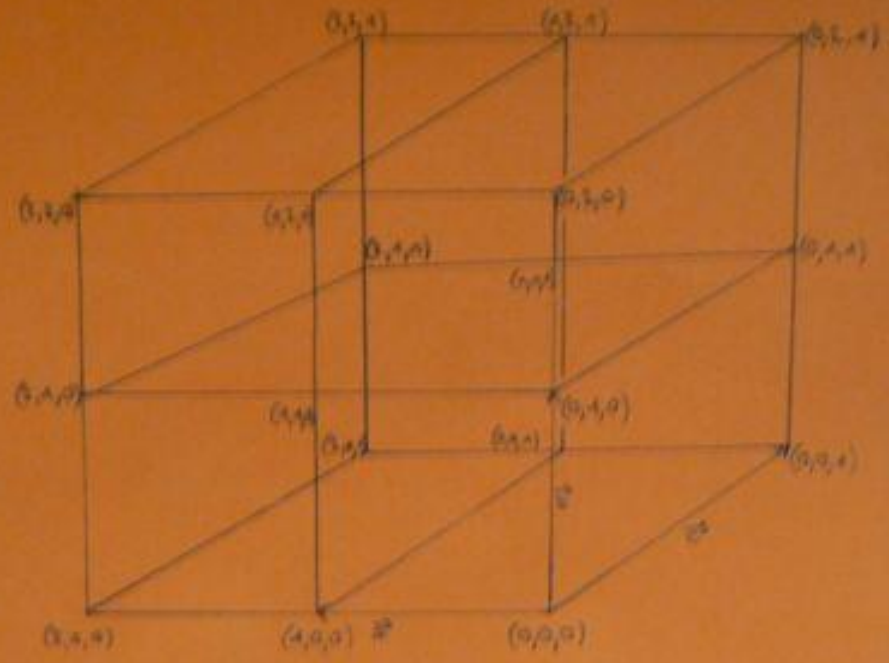



5D

Tentatives de représentation...







Coordonnées d'un point : (a, b, c)

nombre de possibilités de groupes de coordonnées : 3 × 3 × 2

Pour un nombre N ayant m diviseurs premiers à la puissance 1 :

nombre de rangs n_i : $m+1$

nombre de sommets pour chaque rang n_i : $C_m^i = \binom{m}{i}$ (rang du bas : $i=0$)

$$= \frac{m!}{i!(m-i)!}$$

nombre de sommets total : 2^m

nombre d'arêtes : $\frac{m \times 2^m}{2} = m \times 2^{m-1} = \sum_{i=0}^{m} i \times \binom{m}{i}$ $\longrightarrow$ $(1+x)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k$

$m(1+x)^{m-1} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} k x^{k-1}$

Pour N ayant des diviseurs premiers p_i respectivement élevés à la puissance α_i :

nombre de sommets S :

si $N = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\alpha_i}$

alors $S = \prod_{i=1}^{m} (\alpha_i + 1)$

mbre N ayant m diviseurs premiers à la puissance d :

go n_i : $m+d$

mets pour chaque rang n_i : $C_m^i = \binom{m}{i}$ (rang du bas : $i=0$)

$$= \frac{m!}{i!(m-i)!}$$

mets total : 2^m

ha : $\frac{m \times 2^m}{2} = m \times 2^{m-1} = \sum_{i=0}^{m} i \times \binom{m}{i}$ ⟶ b

$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k$

$m(1+x)^{m-1} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} k x^{k-1}$ d'où $m \cdot 2^{m-1} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \times k$

pour $x=1$.

ant des diviseurs premiers p_i respectivement élevés à la puissance α_i :

mb S :

$\prod_i p_i^{\alpha_i}$

(α_i+1)